

STREDNÁ ODBORNÁ ŠKOLA
Komenského 16, 082 71 Lipany



Učebný zdroj pre žiakov z predmetu Matematika

Odbor: Kozmetik a Pracovník marketingu

Autorka: PaedDr. Iveta Štefančínová, Ph.D.

**Moderné vzdelávanie pre vedomostnú spoločnosť/
Projekt je spolufinancovaný zo zdrojov EÚ**

Názov predmetu	Matematika
Názov a adresa školy	Stredná odborná škola, Komenského 16, 082 71 Lipany
Kód a názov ŠVP	64 Ekonomika a organizácia, obchod a služby
Názov ŠkVP	Obchod a služby
Kód a názov študijného odboru	6405 4 00 pracovník marketingu
Stupeň vzdelania	úplné stredné odborné vzdelanie
Dĺžka štúdia	4 roky
Forma štúdia	denná
Vyučovací jazyk	slovenský
Druh školy	štátna

Obsah

Úvod	4
1. Reálne čísla a ich základné vlastnosti	5
Úlohy na precvičenie	8
2. Mocniny	9
Úlohy na precvičenie	11
3. Výrazy s premennou	14
Úlohy na precvičenie	15
4. Percentá, pomer	19
Úlohy na precvičenie	20
5. Úrok	23
Úlohy na precvičenie	27
6. Výroky	28
Úlohy na precvičenie	30
7. Množiny, Vennove diagramy	33
Úlohy na precvičenie	35
8. Funkcia a jej vlastnosti	40
Úlohy na precvičenie	44
9. Lineárna a konštantná funkcia	49
Úlohy na precvičenie	51
10. Lineárne rovnice, nerovnice, sústavy	54
Úlohy na precvičenie	56
11. Kvadratická funkcia	58
Úlohy na precvičenie	59
12. Kvadratické rovnice a nerovnice	61
Úlohy na precvičenie	62
13. Goniometrické funkcie	63
Úlohy na precvičenie	69
14. Goniometrické rovnice, nerovnice	71
Úlohy na precvičenie	76
15. Kombinatorika	77
Úlohy na precvičenie	80
16. Teória pravdepodobnosti	82
Úlohy na precvičenie	83
17. Základy štatistiky	84
Úlohy na precvičenie	86

Úvod

Matematika rozvíja u žiakov matematické myslenie, ktoré je potrebné pri riešení rôznych problémov v každodenných situáciách, kedy sa musia používať matematické modely myslenia a prezentácie.

Predložená učebná pomôcka je zameraná na niekoľko tematických okruhov: čísla, premenná a početné výkony s číslami; vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy; kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika; logika, dôvodenia, dôkazy.

Matematický obsah je rozčlenený do 16 kapitol, pričom každá kapitola obsahuje stručný teoretický úvod a následne úlohy na precvičenie. Vychádzajúc z učebných osnov pre odbor Kozmetik a Pracovník marketingu sú ponúknuté témy reálne čísla a ich základné vlastnosti; mocniny; výrazy s premennou; percentá a pomer; úrok; výroky; množiny a Vennove diagramy; všeobecne funkcia a jej vlastnosti; lineárna funkcia a jej vlastnosti; lineárne rovnice, nerovnice a sústavy; kvadratická funkcia, rovnica a nerovnica; goniometrická funkcia, rovnica a nerovnica; základy kombinatoriky, teórie pravdepodobnosti a štatistiky.

autorka

1. Reálne čísla a ich základné vlastnosti

Zavedieme označenie základných číselných množín:

Prirodzené čísla sú čísla 1,2, 3. Súčet a súčin prirodzených čísel je prirodzené číslo. **N** - množina všetkých prirodzených čísel.

Celé čísla sú všetky čísla, ktoré môžeme vyjadriť ako rozdiel dvoch prirodzených čísel. Súčet, súčin a rozdiel celých čísel je celé číslo. **Z**- množina všetkých celých čísel.

Racionálne čísla sú všetky čísla, ktoré je možné vyjadriť ako podiel celého a prirodzeného čísla. Súčet, rozdiel, súčin a podiel racionálnych čísel (okrem delenia nulou) je racionálne číslo. **Q**- množina všetkých racionálnych čísel.

Iracionálne čísla sú čísla, ktoré možno vyjadriť v tvare nekonečného neperiodického desatinného zlomku. Napríklad $\sqrt{2} = 1,41421\dots$, $\pi = 3,1416\dots$ – sú neperiodické desatinné čísla. **I**- množina všetkých iracionálnych čísel.

Zjednotenie množiny racionálnych a iracionálnych čísel tvorí množinu **reálnych čísel**. **R**- množina všetkých reálnych čísel.

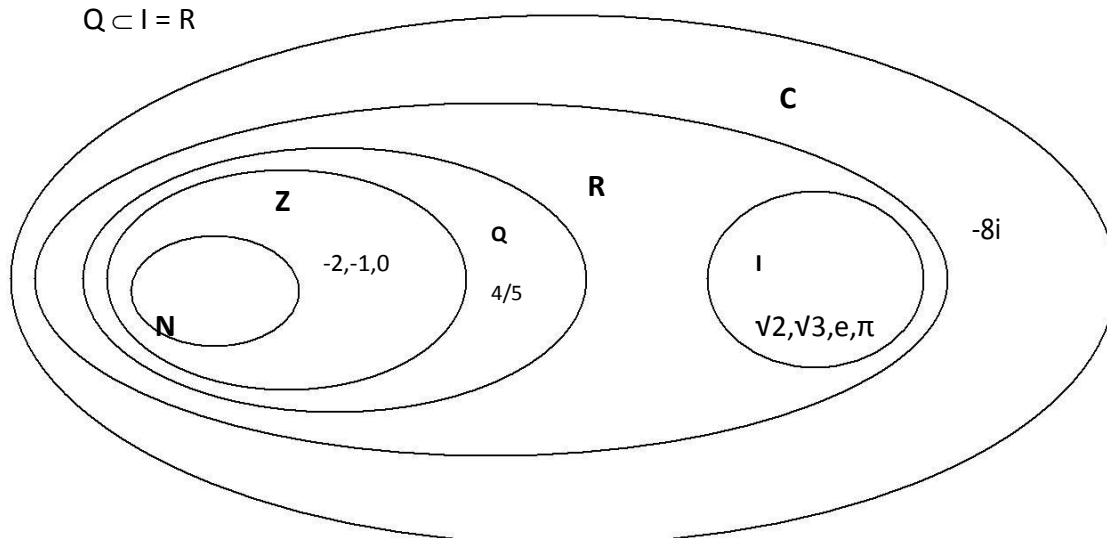
V obore reálnych čísel **R** je každé reálne číslo znázornené na číselnej osi práve jedným bodom a naopak, každý bod číselnej osi je obrazom jedného reálneho čísla.

Z vyššie uvedeného vyplýva, že medzi jednotlivými číselnými množinami platí nasledujúci vzťah:

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

$$I \subset R$$

$$Q \cup I = R$$



Existujú aj **komplexné čísla** (**C**). Je to množina čísel tvaru: $a + bi$; pričom $i^2 = -1$; a – reálna zložka, bi – imaginárna zložka

Množina reálnych čísel má nasledovné vlastnosti:

1. Je usporiadaná, pre každé dve reálne čísla a, b platí práve jeden zo vzťahov: $a = b$, alebo $a < b$, alebo $a > b$.
2. Medzi dvomi ľubovoľnými reálnymi číslami a, b , pre ktoré platí $a < b$, existuje aspoň jedno reálne číslo c tak, aby $a < c < b$.
3. Je uzavretá vzhľadom na súčet, rozdiel, súčin a podiel, t.j. súčet, rozdiel, súčin a podiel reálnych čísel je reálne číslo.
4. Množinu reálnych čísel je možné znázorniť na číselnej osi.
5. Ku každému reálnemu číslu existuje jeho absolútna hodnota.
6. Každé nezáporné reálne číslo má druhú odmocninu, ktorá je tiež reálne číslo. Naopak, žiadne záporne reálne číslo nemá druhú odmocninu, ktorá by bola reálne číslo.

Pre každé $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí:

1. Komutatívny zákon:

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

2. Asociatívny zákon:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3. Distributívny zákon:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$4. a \cdot b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)$$

$$5. a/b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \wedge b \neq 0)$$

6. vlastnosť 0, 1

$$a + 0 = a$$

$$a \cdot 1 = a$$

7. monotónnosť sčítania vzhľadom k nerovnosti:

$$a < b, \text{ tak } a + c < b + c$$

8. tranzitívnosť

$$a < b \text{ a } b < c, \text{ tak } a < c$$

Vzdialenosť obrazu reálneho čísla od počiatku číselnej osi udáva **absolútnu hodnotu** reálneho čísla $|a|$, ktorá je definovaná:

$$a \geq 0, |a| = a$$

$$a < 0, |a| = -a$$

Vlastnosti absolútnej hodnoty:

1. Pre každé reálne číslo a platí $|a| \geq 0$, $|-a| = |a|$, $|a| \geq a$, $|a| \geq -a$

2. Pre každé dve reálne čísla a, b platí: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$$|a / b| = |a| / |b|$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|, b \neq 0$$

Každé iracionálne číslo je vyjadrené nekonečným neperiodickým desatinným rozvojom. V praxi určujeme iracionálne číslo pomocou jeho **aproximácie**, predpisom, ktorý umožní vypísať číslicu na ľubovoľnom mieste desatinného rozvoja, popr. pracujeme so **zaokrúhlenou** hodnotou reálneho čísla alebo s **odmocninami**.

Zaokrúhľovanie čísla a na jednotky daného rádu k (na desatiny, tisíciny, stovky, ...) robíme nasledovne:

- všetky číslice nižších rádov vynecháme a vypustené číslice nahradíme nulami
- ostatné číslice ponecháme s prípadnou zmenou podľa pravidiel zaokrúhľovania:
- ak je prvá z vypustených číslic **menšia ako 5**, potom sa posledná číslica nemení – hovoríme o **zaokrúhľovaní nadol**
- ak je prvá z vypustených číslic **väčšia ako 5**, potom sa posledná číslica zväčší o 1 – hovoríme o **zaokrúhľovaní nahor**.

Veľmi veľké čísla alebo malé čísla vieme zapísať zjednodušeným zápisom $a \cdot 10^n$, kde $1 \leq a < 10$, $n \in \mathbb{R}$.

Úlohy na precvičenie

1. Na číselnej osi znázorníte reálne čísla:

$$3; \pi; -\pi; -1; 1 + \sqrt{2}; \frac{5}{3}; 0,25; -\sqrt{3}.$$

2. Ktoré z nasledujúcich čísel sú racionálne:

$$\sqrt{5} + 0, \overline{12}; \sqrt{2}\sqrt{8}; \sqrt{3}(\sqrt{3} + 2); (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}); 0,12 \cdot 0, \overline{12}; \sqrt{\frac{6}{18}}; \sqrt{\frac{27}{75}}.$$

3. Usporiadajte dané trojice čísel:

$$\frac{22}{7}, \pi, \frac{355}{113}; \frac{13}{15}, \sqrt{7}, \frac{16}{6}; -\sqrt{2}, -1, 41, -1, 44; -\frac{7}{3}, -2, 34, -2, 31.$$

4. Napíšte kladné racionálne číslo menšie ako 0,000 001 a kladné racionálne číslo menšie ako 0,000 001.v2.

5. Zistite, či platia nerovnosti:

$$3 - \sqrt{2} - \frac{5}{3} > 0$$

$$4 - \sqrt{3} - \frac{7}{3} > 0$$

$$\pi - 8 + \ln(2) > 0.$$

6. Zapíšte čísla ako mocninu so základom 10: stotisíc, 3 miliardy, 15 miliónov, 28 biliónov, 22 tisíc, 2 biliardy, tristotisíc, 9 miliónov, 300 miliónov, 1 milión 380 tisíc.

7. Zapíšte v tvare $a \cdot 10^n$: Pri Galapágach narazil tanker do skaly a spôsobil obrovskú ekologickú katastrofu. Do oceánu vytieklo 600 000 ton ropy a 300 000 ton vykurovacieho oleja. Pri Brazílii sa potopila do mora najväčšia ropní plošina na svete, ktorej hmotnosť bola až 33 000 ton a na jej palube bolo 1 500 000 litrov ropy, ktorá začala unikať do vody. Ozónová diera nad Antarktídou má 25 000 000 km².

8. Vypočítajte:

a) $8 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10 + 1 \cdot 10^0$

b) $3,8 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^3 + 2,6 \cdot 10^2 - 8 \cdot 10$

c) $5,1 \cdot 10^3 - 2,9 \cdot 10^2 - 2,4 \cdot 10 + 3 \cdot 10^0$

2. Mocniny

Definícia

Pre každé $a \in R$ a $n \in N$ platí: $a^n = \underset{n\text{-krát}}{a.a.a\dots a}$.

a^n - mocnina

a – základ mocniny

n – mocniteľ (exponent)

Vety o mocninách:

Pre každé $a \in R$ a $r, s \in N$ platí: $a^r . a^s = a^{r+s}$.

Pre každé $a \in R - \{0\}$ a $r, s \in N$ platí: $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$.

Pre každé $a \in R$ a $r, s \in N$ platí: $(a^r)^s = a^{r.s}$.

Pre každé $a, b \in R$ a $r \in N$ platí: $a^r . b^r = (a.b)^r$.

Pre každé $a, b \in R, b \neq 0$ a $r \in N$ platí: $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$.

Pre každé $a \in R, a \neq 0$ a platí: $a^0 = 1$.

Pre každé $a \in R, a \neq 0$ a pre každé $m \in N$ platí: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

Pre každé $a, b \in R - \{0\}$ a $z \in Z$ platí: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-z} = \left(\frac{b}{a}\right)^z$.

Definícia

Druhá odmocnina z nezáporného reálneho čísla a je také nezáporné číslo x , pre ktoré platí: $x^2 = a$. Píšeme $x = \sqrt{a}$.

N je prirodzené číslo. N -tá odmocnina z nezáporného reálneho čísla a je také nezáporné číslo b , pre ktoré platí $b^n = a$. Píšeme $b = \sqrt[n]{a}$.

a - základ odmocniny

n - odmocniteľ

Vety o odmocninách

Pre všetky nezáporne čísla a, b a pre každé prirodzené číslo n platí: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Pre všetky nezáporne čísla a, b ($b \neq 0$) platí: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Pre každé celé číslo s , každé kladné reálne číslo a a každé prirodzené číslo n platí: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^s = \sqrt[n]{a^s}$.

Pre všetky prirodzené čísla m, n a pre každé reálne nezáporné číslo a platí: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$.

Pre všetky prirodzené čísla m, n, p a pre každé nezáporné číslo a platí: $\sqrt[p \cdot m]{a^{p \cdot n}} = \sqrt[m]{a^n}$.

Pre každé kladné reálne číslo a , pre každé prirodzené číslo n platí: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Pre každé kladné reálne číslo a , pre každé celé číslo m , pre každé prirodzené číslo n platí: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Úlohy na precvičenie

1. Usmernite zlomok:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{14}}{\sqrt{6}}$

c) $\frac{2}{3-\sqrt{5}}$

d) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}+2}$

2. Najprv čiastočne odmocnite a potom vypočítajte:

a) $2\sqrt{8}-\sqrt{8}+11\sqrt{72}$

b) $3\sqrt[3]{54}+4\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{2}+6\sqrt[3]{128}$

3. Pomocou viet o mocninách a odmocninách vypočítajte a výsledok uveďte v tvare mocniny aj odmocniny.

a) $\frac{x^{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[7]{y^6} \cdot \sqrt{x^{-3}}}{y^{\frac{3}{5}}}$

b) $5^4 \cdot 25^{\frac{2}{3}} \cdot 125^{-2} \cdot 625^{\frac{3}{4}}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3^6}}$

4. Určte pre aké b má výraz zmysel: $\sqrt{7b-4}$

5. Vypočítajte:

a) $\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) : \left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

b) $(\sqrt{7}+4) \cdot \left(\frac{21}{2\sqrt{7}} - \frac{12}{\sqrt{7}+1}\right)$

c) $\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\sqrt{3}-\sqrt{11}} + \frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}\right)^2$

6. Základy mocnín rozložte na prvočísla, potom zlomky kráťte:

a) $\frac{6^7 \cdot 22^5 \cdot 15^6 \cdot 2^7}{10^7 \cdot 12^6 \cdot 33^5}$

b) $\frac{6^{3n-1} \cdot 9^{n-1} \cdot 10^{2n-1}}{30^{2n-4} \cdot 32^n \cdot 12^{1-n}}$

7. Vypočítajte bez použitia kalkulačky:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 2^{-1} + (-1)^5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$$\begin{aligned} \text{b)} & \left\{ \left[\frac{1}{2} \right]^{-1} - (3^{-1}) + 1 \right\}^{-2} \\ \text{c)} & \left[2x^{-1} + (2x)^{-1} + (x+2)^{-1} \right]^{-1} \cdot (x+2)^{-1} \\ \text{d)} & x^{-1} \cdot (1-x^{-2}) (1+x^{-3})^{-1} \cdot (x^{-2} - x^{-1} + 1) \end{aligned}$$

8. Upravte a výsledok zapíšte pomocou mocnín prvočísel:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \frac{15^4 \cdot 64}{(6^2 \cdot 70)^2} \div \left(\frac{14^3}{30^5 \cdot 128} \right)^2 = \\ \text{b)} & \frac{3072^2}{2 \cdot 3^{13}} : \left(\frac{64}{81} \right)^3 = \end{aligned}$$

9. Upravte a určte podmienky:

$$\left(\frac{4a^2b}{c^{-3}d^2} \right)^3 \cdot \left(\frac{2a^5b^{-2}}{c^{-4}d^3} \right)^{-2} =$$

10. Upravte:

$$\frac{9x - 4x^{-1}}{(3 + 2x^{-1})x^{-1}} =$$

11. Čiastočne odmocnite:

$$\sqrt[4]{48a^5b^{11}} =$$

12. Usmernite:

$$\frac{3a^2 - 12}{-\sqrt{2} - \sqrt{a}} =$$

13. Upravte s podmienkami

$$\text{a)} \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a^3}{b^3}}} =$$

$$b) \left(\frac{4x^{-2} - 1}{3x + 6} \right)^{-2} =$$

14. Vypočítajte a upravte výraz, zapíšte s jednou odmocninou:

$$15\sqrt{0,2} + 4\sqrt{45} + \frac{6}{2 - \sqrt{5}} =$$

3. Výrazy s premennou

Algebraický výraz

zápis obsahujúci čísla, premenné, znaky operácií a zátvorky

1. množinový výraz: $(A \cap B) \cap C$

2. číselný výraz: $\sqrt{3}$

3. s premennou: $8x - 3$

4. lomený výraz $5/x$

Úprava výrazu – nahradenie výrazu iným výrazom, ktorý sa mu na danej množine rovná a má žiadaný tvar. Môže mať tvar súčinu, neobsahuje odmocninu v menovateli.

Zjednodušenie výrazu – úprava na základný tvar (čo najmenší počet premenných, zátvoriek, a operácií)

Definičný obor výrazu – množina hodnôt premenných, pre ktoré má daný výraz zmysel.

Mnohočlen = polynóm n-tého stupňa

výraz tvaru: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$; kde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$

n = stupeň polynómu

a_n = koeficient

napr.

$$2x^5 - 4x^3 + 1 = 0$$

$$a_5 = 2 \qquad a_2 = 0$$

$$a_4 = 0 \qquad a_1 = 0$$

$$a_3 = -4 \qquad a_0 = 1$$

Pri počítaní s mnohočlenmi využívame tieto vzorce:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

Úlohy na precvičenie

1. Úprava výrazov pomocou vzorcov $(a \pm b)^2$

- a) $(u + v)^2$
- b) $(x + 5)^2$
- c) $(10 + y)^2$
- d) $(4x + y)^2$
- e) $(3a + 5c)^2$
- f) $(ab + cd)^2$
- g) $(u - v)^2$
- h) $(x - 4)^2$
- i) $(8 - y)^2$
- j) $(x - 2y)^2$
- k) $(3c - 5d)^2$
- l) $(ab - cd)^2$

2. Umocnite podľa príslušného vzorca:

- a) $(1 + x)^2$
- b) $(2x + y)^2$
- c) $(2x - 7y)^2$
- d) $(x^2 - y)^2$
- e) $(-x + y)^2$
- f) $(2x + 3z)^2$
- g) $(-6xy - 1)^2$
- h) $(xyz - 3)^2$

Správnosť overte dosadením za $x = 1, y = -2, z = 3$

3. Napíšte ako druhú mocninu dvojčlena:

- a) $x^2 + 6xy + 9y^2$
- b) $a^2 - 14a + 49$
- c) $\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{3}yz + \frac{1}{9}z^2$
- d) $0,01 + 0,04c + 0,04c^2$

4. Doplníte výrazy tak, aby každý výraz predstavoval druhú mocninu dvojčlena:

- a) $a^2 - 2ab + *$
- b) $x^2 - * + 1$
- c) $4x^2 - 12x + *$
- d) $9u^2 + * + 16$
- e) $49 - 14e + *$
- f) $* + 4mn + n^2$

- g) $*-30v + 25$
- h) $*+14cd + d^2$
- i) $c^2 - * + 64a^2$
- j) $*-6xy + 9y^2$
- k) $4m^2 - * + s^2$
- l) $k^2 - * + 4d^2$
- m) $c^2 - * + 9d^2$
- n) $81u^2 - 36uv + *$
- o) $*-4rs + s^2$

5. Doplňte na vynechané miesta výrazy tak, aby platila rovnosť:

- a) $(a + *)^2 = a^2 + 6a + *$
- b) $(3a - *)^2 = * - 24ab + *$
- c) $(* + 2xy)^2 = 25z^4 + * + *$
- d) $(* - *)^2 = 4x^2 - * + 16y^4$

6. Zistite, či platí rovnosť:

- a) $(x + y)^2 = (y + x)^2$
- b) $(a - b)^2 = (b - a)^2$
- c) $(-2x + y)^2 = (-y + 2x)^2$

7. Vypočítajte:

- a) $(a - 1)^2 - (a + 2)^2 + (a - 3)^2$
- b) $(d + c)^2 + (d - c)^2$
- c) $(2y - 3z)^2 + (3y + 2z)^2$
- d) $4(x + 3y)^2 - (4x + 3y)^2$

8. Vypočítajte neznámu x, ak platí:

- a) $x^2 - (x + 3)^2 = -3$
- b) $3(x - 5)^2 - x(3x - 5) = 0$
- c) $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = 0$
- d) $4(x + 0,2)^2 = (2x - 0,2)^2$

9. Rozložte na súčin:

- a) $p^2 + 2p + 1$
- b) $p^2 - 4p + 4$
- c) $4x^2 + 4xy + y^2$
- d) $x^2 + 6xy + 9y^2$
- e) $16m^2 - 8mn + n^2$
- f) $25m^2 - 70mn + 49n^2$
- g) $9 + 12r + 4r^2$

- h) $81 - 108r + 36r^2$
- i) $u^2v^2 + 24uv + 144$
- j) $9u^2v^2 - 6uv + 1$
- k) $a^2b^2 + 2abc + c^2$
- l) $a^2b^2 - 6abc + 9c^2$
- m) $16 - 56xy + 49x^2y^2$
- n) $100x^2y^2 - 120xyz + 36z^2$
- o) $m^2 - 5m + 6,25$
- p) $r^4 + 4r^2s + 4s^2$
- q) $0,01p^2 - 0,2prs + r^2s^2$
- r) $9s^2 - 12r^2s + 4r^4$

10. Z daných výrazov vyjmite (-1) a upravte na súčin:

- a) $-x^2 - 6x - 9$
- b) $-y^2 + 10y - 25$
- c) $-9m^2 - 24mn - 16n^2$
- d) $-49p^2 + 126pq - 81q^2$

11. Určte hodnotu výrazu pre $a = 2$:

$$\frac{1}{a - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{a}}}} =$$

12. Určte hodnotu výrazu pre $r = -2$ a $r = \sqrt{6}$:

$$\frac{r+1}{r^2-2r} + \frac{r+1}{r^2+2r} - \frac{2r}{r^2-4} =$$

13. Určte hodnotu výrazu pre $x = -1$:

$$\frac{4x^2 + 4}{2x^2 + 2} =$$

14. Zjednodušte výraz:

$$\frac{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}{1 - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}} \cdot \frac{2 - \frac{1+b^2}{b}}{\frac{1}{b^2} - \frac{2}{b} + 1} =$$

15. Upravte:

$$\left(\frac{x^2 - 2x + 4}{4x^2 - 1} \cdot \frac{2x^2 + x}{x^3 + 8} - \frac{x+2}{2x^2 - x} \right) : \frac{4}{x^2 + 2x} - \frac{x+4}{3-6x} =$$

16. Upravte:

$$\frac{\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}} =$$

17. Upravte:

$$\left(\left(\frac{n+2}{n-2} \right)^3 : \frac{n^3 + 4n^2 + 4n}{3n^2 - 12n + 12} \right) \cdot \frac{n}{3} =$$

18. Zjednodušte: $\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y \cdot (x - y)^2}{x^4 - y^4} =$

19. Zjednodušte: $\frac{m^4 - m}{2m^2 + 2m + 2}$

20. Upravte výraz: $\left(\frac{1}{1-a} - 1\right) : \left(a - \frac{1-2a^2}{1-a} + 1\right) =$

21. Upravte výraz: $\frac{x^2 + 9x + 14}{x^2 - x - 12} : \frac{x^2 + 6x - 7}{x^2 - 2x - 15} =$

22. Určte definičný obor výrazu:

a) $\sqrt{\frac{x-5}{3-x}}$ b) $\frac{3}{x^2 + x - 2}$ c) $\sqrt{x^2 + x - 2}$

23. Pre $z \in (-1, 1)$ sa výraz $\frac{z+1}{\sqrt{1 + \frac{4z}{(z-1)^2}}}$ rovná výrazu

a) $1-z$

b) $z-1$

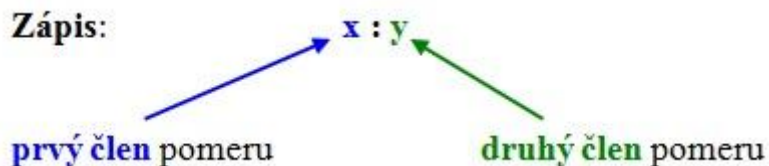
c) $\frac{1}{1-z}$

d) $\frac{1}{z-1}$

e) $\frac{(z+1)^2}{1-z}$

4. Percentá, pomer

Pomer je vzťah medzi dvomi veličinami, ktorý nám vyjadruje podiel medzi veľkosťami týchto veličín. Z pomeru vieme povedať koľkokrát je jedna veličina väčšia resp. menšia ako druhá.



Dve čísla (veľičiny) môžeme porovnať iba v prípade, ak sú uvedené v **rovnakých jednotkách**:

Percento (1%)

- z určitého vymedzeného množstva predstavuje jednu stotinu ($1/100$) z tohto množstva
- ak si rozdelíme jablkový koláč na 100 častí, tak jedna časť z tohto koláča predstavuje jedno percento

Pri percentách rozlišujeme nasledovné základné pojmy:

- **základ:** štandardne v literatúre označovaný ako „z“ je hlavná časť, resp. zadaný celok, z ktorého budeme počítat počet percent. Platí preň vzťah:

$$\text{základ} = \text{časť základu} / \text{počet percent}$$

- **časť základu:** je to v číslach vyjadrené určité množstvo zo základu, resp. je to množstvo základu vypočítané na základe príslušného počtu percent. V literatúre ho štandardne nájdeme označené ako „č“. Platí preň vzorec:

$$\text{časť základu} = \text{základ} * \text{počet percent}$$

- **počet percent:** nám hovorí, akú časť z hlavného základu máme. V literatúre ho štandardne nájdeme označené ako „p“. Platí preň vzťah:

$$\text{počet percent} = \text{časť základu} / \text{základ}$$

Percentá môžeme vyjadrovať troma spôsobmi, a to ako

- zlomok = $\frac{1}{2}$
- desatinné číslo = 0,5
- stonásobok desatinného čísla [%] = $100 * 0,5 = 50\%$

Úlohy na precvičenie

1. Pomer hrán podstavy kvádra $a : b = 2 : 1$. Pomer kratšej hrany podstavy a výšky $b : c = 2 :$
5. Aký je pomer dlhšej hrany podstavy a výšky ?

- A. 4 : 5 B. 1 : 5 C. 5 : 4 D. 4 : 6

2. Dĺžka úsečky AB je 35 m. Nájdi vzdialenosť medzi stredom úsečky AB a bodom, ktorý ju delí v pomere 2 : 3.

- A. 1,5 m B. 2,5 m C. 3,5 m D. 4,5 m

3. Mierka mapy je 1 : 20 000. Turista kráčajúci rýchlosťou 6 km / h prejde trasu, ktorá je na mape dlhá 2,5 cm, za čas:

- A. 0,12 hod. B. 1/12 hod. C. 5/12 hod. D. 0,05 hod.

4. Aby maliar dostal takú farbu, akú potrebuje, musí zmiešať zelenú a žltú farbu v pomere 4 : 7. Ak má 28 litrov zelenej farby, koľko litrov žltej farby by mal do nej pridať ?

- A. 11 B. 16 C. 49 D. 28

5. Detské ihrisko má rozmery 50 m a 24 m. Na pláne je toto ihrisko zobrazené ako obdĺžnik s obvodom 7,4 cm. V akej mierke je plán mesta?

- A. 1:200 B. 1 : 1 000 C. 1 : 2 000 D. 1 : 2 500

6. Danko a Janka si rozdelili balíček cukríkov v pomere 5 : 7. Janka tak dostala o 4 cukríky viac ako Danko. Koľko cukríkov bolo v balíčku?

7. Záhrada v tvare obdĺžnika má na pláne mierky 1 : 5 000 rozmery 8 mm a 11 mm. Aká je skutočná výmera záhrady?

- A. 950 m² B. 2 200 m² C. 4 400 m² D. 1 500 m²

8. Turistická mapa má mierku 1 : 10 000. Skauti sa nachádzajú na stanovišti A. Najbližšie stanovište B je na mape vzdialené 14 cm. Za aký čas sa k nemu dostanú ak prejdú 7 km za hodinu?

- A. 0,02 hod. B. 20 min. C. 2 hod. D. 0,2 hod.

9. Rozdeľ 1 148 orechov v pomere 2 : 3 : 4 : 5.

10. Akú mierku mapy treba zvoliť, aby sme mohli na nej úsek dĺžky 5 km zobraziť úsečkou dĺžky 2 cm?

11. Mierka mapy je 1 : 10 000. Trasu, ktorá je na mape dlhá 6 cm, prejde turista za 6 minút. Aká je jeho rýchlosť v km / hod. ?

12. Výkony dvoch kopírovacích strojov sú v pomere 3 : 4. Stroj s väčším výkonom namnoží za hodinu 7 200 kópií. Koľko kópií namnožia spolu za 5 hodín ?

13. Tri skupiny odborníkov si rozdelili zárobok v pomere 2 : 1 : 3. Vypočítaj, koľko zarobila každá skupina, ak druhá a tretia dostala spolu 8 400 eur ?

14. Petrove a Mišove vreckové bolo v pomere 5 : 7. Peter minul na darček 15 eur, Mišo 19 eur a zvyšok ich peňazí bol v pomere 2 : 3. Koľko mal pôvodne každý z nich?
15. Peter, Jozef a Lenka si rozdelili 10 200 eur. Sumy, ktoré si rozdelili Peter a Jozef boli v pomere 3 : 4. Sumy, ktoré si rozdelili Jozef a Lenka, boli v pomere 5 : 4. Koľko eur dostal Peter?
16. Banka si účtuje za poskytnutie služieb svojim klientom 13,5% z hodnoty poskytovaných služieb. V akej hodnote poskytla služby, ak v danom období inkasovala banka v hotovosti 678 453 180 € ?
17. Nominálna hodnota jubilejnej česko-slovenskej striebornej mince je 11€. Na numizmatickej burze ju majiteľ predal za 31€. Vypočítajte zisk predávajúceho v %.
18. Pri výrobe bavlnenej priadze sa použilo 3 626 kg bavlny. Pri spracovaní bol 3%-ný odpad. Koľko kg bavlny bol odpad?
19. Ťažné lano visutej lanovky sa predlžuje ťahom asi o 1,4%. O koľko metrov sa predĺži plne zaťažené lano dlhé 982 m?
20. Pri výrobe bavlnenej konfekcie je predpokladaný 3,5% odpad. Koľko kilogramov tvoril odpad, ak na spracovanie zákazky bolo objednaných 4 570 kg bavlnenej tkaniny.
21. V obchode s potravinami predali v januári tovar za 326 840 €. Vo februári sa zvýšili ich tržby o 21,5%. O koľko € sa zvýšili tržby v obchode s potravinami vo februári?
22. Vo fľaši je 900g sirupu, ktorý obsahuje 50% cukru, 15% malinovej, 10% čučoriedkovej a 25% jablkovej šťavy. Koľko gramov jednotlivých druhov štiav je vo fľaši?
23. Výrobca predal podnikateľovi tovar za 24 350 €. Dohodli sa, že podnikateľ dostane 20% odmeny z ceny predaného tovaru. Koľko € zarobí podnikateľ, ak predá všetok tovar?
24. Ročná odpisová sadzba danej skupiny hmotného investičného majetku je 15%. Vypočítajte ročný odpis hmotného investičného majetku, ktorý má obstarávaciu cenu 286 454 €.
25. Zásielka tovaru vrátane obalu má hmotnosť 836 kg. Aká je hmotnosť obalu v kg? Tara je 12,5% z bruto hmotnosti.
26. Z celkovej produkcie cementárne pripadá na vývoz do zahraničia 71,3%. V bežnom mesiaci sa expedovalo do zahraničia 25 823 t cementu. Aká bola mesačná produkcia cementu?
27. Zemiaky obsahujú 76,1% škrobu. Koľko zemiakov potrebujeme, ak chceme získať 12,5 kg škrobu?
28. Zomletím pšenice dostaneme 81,5% múky. Koľko pšenice treba zomlieť, aby sme získali 2,5 t pšeničnej múky.

29. Pri výrobe konfekcie bol dovolený 2,4%-ný odpad, ktorý mal hmotnosť 96 kg. Koľko kg materiálu sa muselo vyrobiť, aby boli z neho mohli vyrobiť kvalitné konfekčné výrobky?
30. Hmotnosť obalu (tara) je 64,5 kg, čo je 23,4% z hrubej (bruto) hmotnosti zásielky. Aká je hmotnosť zásielky?
31. Škola od začiatku septembra vyčerpala na učebné pomôcky 326 580 €, čo predstavuje 72,6% ročného rozpočtu. Koľko € sa rozpočtovalo na učebné pomôcky na obdobie celého roka?
32. Z predaného tovaru si podnikateľ odčítal 13,5% odmeny v sume 3 658 €. Aká veľká bola jeho tržba v € ?
33. V 1kg bronzu na výrobu ložísk je 152 g olova, 85 g cínu a zvyšok je meď. Vyjadrite obsah olova, cínu a medi v %.
34. Skutočné náklady na výrobu istého výrobku sú spolu 7 483€. Z celkového objemu skutočných nákladov sú mzdové náklady 4 396 €. Koľko percent tvoria mzdové náklady z celkového objemu skutočných nákladov?
35. Obstarávacía cena jedného solárneho kolektora bola 1225 €. Pri rekonštrukcii budovy ich použili 30 ks. Vypočítajte koľko % z ceny kolektorov boli inštalačné náklady vyčíslené sumou 12 280€.

5. Úrok

Úrok je čiastka, ktorú peňažné ústavy vyplácajú z peňazí, ktoré si do nich uložíme. Napríklad, ak si uložíme do banky napr. 1000€, banka môže s nimi hospodáriť – narábať, za čo mi vyplatia spomínaný úrok. Aký veľký bude úrok závisí od viacerých faktorov, a to od:

- veľkosti vkladu
- dĺžky doby, počas ktorej vklad v peňažnom ústave (banka, sporiteľňa) necháme
- druhu vkladu (z ktorého sa úrok vypláca) – **istiny**

Pri počítaní s percentami sme si zaviedli pojmy ako **základ, počet percent, a percentová časť**. Ak si tieto pojmy premietneme do úrokovania, môžeme povedať, že:

- základom je **istina** – finančná čiastka, ktorá je uložená v banke
- počet percent → **úroková miera** – určitý počet % z istiny
- percentová časť → **percentová časť** – teda čiastka, ktorá sa, zvyčajne jedenkrát ročne pripočíta k istine

Pri výpočtoch budeme používať tieto symboly:

istina*z*

úroková miera.....*p*

úrok*ú*

úrokové obdobie*t*

Pre výpočet úroku (pre jednoduché úrokovanie) platí tento vzťah:

$$ú = \frac{z \cdot p \cdot t}{100}$$

Pri výpočtoch možno používať i trojčlenkou.

1. Pani Kováčová si do banky uložila 400€, pri ročnej úrokovej miere 3%. Koľko eur jej banka po roku pripíše na účet? Koľko peňazí bude mať pani Kováčová po roku na účte?

Riešenie:

Dané je:

istina400€*z*

úroková miera.....3%.....*p*

úrokové obdobie1 rok*t*

úrok*x*€ *ú*

I. výpočet pomocou vzťahu:

$$ú = \frac{z \cdot p \cdot t}{100} = \frac{400 \cdot 3 \cdot 1}{100}$$

$$ú = 12€$$

II. výpočet pomocou trojčlenky:

100%400€

3%*x* €

$$\frac{3}{100} = \frac{x}{400}$$

$$x = \frac{400 \cdot 3}{100}$$

$$x = 12\text{€}$$

Po roku banka pani Kováčovej pripíše na účet 12€, teda, po roku bude mať na účte 412€.

2. Koľko eur si pán Svitek uložil do banky, ak po roku, pri ročnej úrokovej miere 3,8%, mal na účte 2076€?

Riešenie:

úroková miera3,8%

úrokové obdobie1 rok

istina? €

Keďže nevieme úrok (ú), budeme počítať pomocou trojčlenky:

2076€103,8%

x€100%

$$x = \frac{2076 \cdot 100}{103,8}$$

$$x = 2000\text{€}$$

Pán Svitek si na začiatku úrokovacieho obdobia vložil do banky 2000€.

3. Andrej dostal na narodeniny peniaze. Rozmýšľal, že ak si ich uloží v banke, neminie ich a po roku mu nejaké peniaze k tým čo dostal, ešte pribudnú. Pri ročnej úrokovej miere 2% mu po roku k uloženým peniazom pribudli 2€. Koľko peňazí dostal k narodeninám? (za predpokladu, že si ich všetky uložil do banky).

Riešenie:

p.....2%

ú.....2€

t.....1 rok

z? €

zo vzťahu pre výpočet úroku so vyjadríme z:

$$z = \frac{\dot{u} \cdot 100}{p \cdot t}$$

Teda:

$$z = (2 \cdot 100) : (2 \cdot 1)$$

$$z = 100\text{€}$$

Andrej k narodeninám dostal 100€.

4. Z vkladu 500€ banka pani Novákovej pripísala na účet roku 12,50€. Akou úrokovou mierou banka vklad úročila?

Riešenie:

základ (z)500€

úrok (ú)12,5€

úrokové obdobie (t)1 rok

úroková miera (ú)? %

I. Výpočet pomocou vzorca – zo vzťahu pre jednoduché úrokovanie si vyjadríme p:

$$p = \frac{ú \cdot 100}{z \cdot t}$$

Teda:

$$p = (12,5 \cdot 100) : (500 \cdot 1)$$

$$p = 2,5\%$$

II. Výpočet trojčlenkou:

500€100%

12,5€x %

$$x = \frac{12,5}{500} \cdot 100$$

$$x = 2,5\%$$

Pani Nováková si vložila svoje peniaze na účet s ročnou úrokovou mierou 2,5%.

Daň z úroku

Doteraz sme počítali s predpokladom, že k účtu sa po určitom úrokovom období pripíše celá vypočítaná suma. V skutočnosti to však „funguje tak“, že každý príjem štát zdaňuje, a teda aj úrok. To znamená, že z vypočítaného úroku **banka** určitú čiastku **odvedie štátu**. **Na Slovensku je v súčasnosti daň z úroku 19%.**

Vráťme sa teda napríklad k príkladu 1, kde si pani Kováčová do banky uložila 400€ a po roku (pri 3% úrokovej miere) úrok, ktorý sme vypočítali, bol 12€. V skutočnosti ale pani Kováčová nemala po roku na účte 412€, ale zo sumy 12€ banka ešte 19% odviedla štátu. Koľko eur teda mala p. Kováčová po roku na účte?

úrok12€

daň z úroku (19%).....x€

úrok po zdanení12€ - x

12€100%

x €19%

$$x = \frac{19}{100} \cdot 12$$

$$\underline{x = 2,28\text{€}}$$

$$\text{úrok po zdanení: } 12\text{€} - 2,28\text{€} = \underline{9,72\text{€}}$$

Banka po roku pripísala pani Kováčovej na účet 9,72€, na účte po roku mala teda 409,72€.

Úlohy na precvičenie

1. O koľko eur vzrastie istina 17 830 € za 7 mesiacov a 23 dní (30,360), ak úroková miera je 12 % p.a.?
2. Koľko eur zaplatíme, ak k dlhu 36 800 € musíme pripočítať 9 % úrok za 8 mesiacov a 24 dní (30,360) ?
3. Vypočítajte 8 % úrok z 23 860 € za : a) 3 roky, b) 7 mesiacov, c) 245 dní (kal,365), d) 245 dní (30,360)
4. Vypočítajte úrok z istiny 23 600 € za 248 dní pri úrokovej miere 5 % p.a. Úlohu riešte za podmienky (30,360) aj (kal,365).
5. Koľko eur úroku vynesie istina 35 740 € pri jednoduchom úrokovaní za 5 rokov ? Úroková miera je 15 % p.a.
6. Určte úrok z kapitálu 10 000 € pri ročnej úrokovej sadzbe 0,08 za obdobie od 15.1.2010 do 10.9.2010.
7. Aký úrok v eurách zaplatí dlžník, ktorý si na pol roka požičal 52 000 € pri 12% p.a.?
8. Aký kapitál bol vložený na vkladnú knižku, ak pri 4 % p.a. za 3 roky do nej vpísali úrok 12 684 € ?
9. Pri úrokovej miere 6% p.a. zaplatil dlžník za 25 dní úrok 1 060 €. Aká veľká bola pôžička?
10. Koľko eur investoval klient na účte úročenom 8 % p.a, ak za 9 mesiacov mu bol pripísaný úrok 3 000 €? (50 000 €)
11. Aká je výška kapitálu, ktorý vynesie pri jednoduchom úrokovaní za 5 rokov úrok 26 805 € ? Úroková miera je 15 % p.a.

6. Výroky

Výroky

- oznamovacie vety, ktorými sa vyjadruje niečo, čo je buď pravdivé alebo nepravdivé.

Pravdivostná hodnota

- za pravdivostnú hodnotu výroku považujeme pravdivosť a nepravdivosť výroku.

Pravdivý výrok: „1“ $P(V) = 1$

Nepravdivý výrok: „0“ $P(V) = 0$

- pravdivostná hodnota výroku V : $P(V)$

Výroky označujeme tlačnými veľkými písmenami abecedy.

$A, B, C, \dots, Z$

napr. „Paríž je hlavným mestom Talianska.“ $\rightarrow$ nepravda, $P(V) = 0$

Hypotéza

- výrok, ktorého pravdivostnú hodnotu sme doteraz neurči, domnienka,
- napr. „Na Marse je život.“

Axióma

- elementárne tvrdenie o vlastnostiach základných pojmov
- tvrdenia, ktoré považujeme za očividné
- $P(V) = 1$, nemusíme ich dokazovať, platí to vždy,
- napr. „Priamky na seba rovnobežné nepretínajú“

Operácie s výrokmi

- z jednoduchých výrokov môžeme prostredníctvom spojok vytvárať súvetia, ktoré považujeme za **zložené výroky**
- logické spojky:** a ($\wedge$); alebo ($\vee$); ak, tak ($\rightarrow$); práve vtedy, keď ($\leftrightarrow$)

1. Negácia výroku

- negácia výroku V : (V^*)
- ku každému výroku V môžeme sformulovať výrok, ktorý popiera pravdivosť tvrdenia obsiahnutého vo výroku V

napr.

V : „Dnes ráno pršalo.“

V^* : „Nie je pravda, že dnes ráno pršalo.“ alebo V^* : „Dnes ráno nepršalo.“

Výrok	Negácia
Každý ... je ...	Aspoň jeden ... nie je ...
Aspoň jeden ... je ...	Ani jeden (žaden, nijaký) ... nie je ...
Aspoň dva sú ...	Najviac jeden je ...
Aspoň tri sú ...	Najviac dva sú ...

2. Konjunkcia

- zložený výrok: A a B
- označujeme ho $A \wedge B$, napr. „Mrzne a sneží.“

3. Disjunkcia = alternatíva

- zložený výrok: A alebo B
- označujeme: $A \vee B$, napr. „Prší alebo padá sneh.“

4. Implikácia

- zložený výrok: ak A, tak B
- označujeme: $A \rightarrow B$, napr. „Ak mi nepomôžeš, tak si ma nepraj.“

5. Ekvivalencia

- zložený výrok: A práve vtedy, keď B
- označujeme $A \leftrightarrow B$, napr. „Šunku kúpim práve vtedy, keď nedostanem salámu.“

Tabuľka s pravdivostnými hodnotami

P(A)	P(B)	$P(A \wedge B)$	$P(A \vee B)$	$P(A \rightarrow B)$	$P(A \leftrightarrow B)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Kvantifikovaný výrok

- každý výrok, ktorý obsahuje kvantifikátory
- **existenčný kvantifikátor**, $\exists$: „existuje“
napr. $\exists x \in \mathbb{N}; x > 1$
 $V': \exists x \in \mathbb{N}; x \leq 1$
- **všeobecný kvantifikátor** - $\forall$: „pre všetky, pre každý“
napr. $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 + 1 > 0$
 $V': \exists x \in \mathbb{R}; x^2 + 1 \leq 0$

Úlohy na precvičenie

1. Na večierok bolo pozvaných 5 kamarátov Karol, Laco, Milan, Tomáš, Peter. Ich odpovede na pozvanie možno vyjadriť výrokmi:

- a) Príde Karol a príde Laco.
- b) Príde Laco alebo príde Milan.
- c) Ak príde Milan, potom príde aj Tomáš.
- d) Peter príde práve vtedy, keď príde Milan.

Pre nepriaznivé počasie neprišiel nikto z nich. Rozhodnite, ktorý z pozvaných neporušil sľub, teda , ktoré z výrokov a) až d) sú pravdivé.

2. Riešte úlohy s právnickou problematikou. Ktoré z nasledujúcich viet sú negáciou vety?

- a) „Niekoľko nemá právo na vzdelanie.“
 - Všetci majú právo na vzdelanie.
 - Niektorí majú právo na vzdelanie.
 - Nikto nemá právo na vzdelanie.
 - Každý má právo na vzdelanie.
- b) „Niektoré školy sa členia na fakulty.“
 - Niektoré školy sa nečlenia na fakulty.
 - Žiadne školy sa nečlenia na fakulty.
 - Všetky školy sa členia na fakulty.
 - Každá škola sa člení na fakulty.

3. Ktoré z nasledujúcich viet možno považovať za výroky? Výrokom priradte pravdivostnú hodnotu

- a) Prší?
- b) Choď a prines loptu!
- c) Bratislava je hlavné mesto Slovenskej republiky
- d) Bratislava je hlavné mesto Rakúska
- e) Riešte nerovnicu!
- f) Existuje snežný muž Yetti
- g) Základy matematickej logiky
- h) Ktoré čísla sú deliteľmi nuly?
- i) Narysuj pravouhlý trojuholník, keď sú dané jeho odvesny.
- j) Susedné strany pravouholníka sú zhodné. (Pravouholník má všetky vnútorné uhly sú pravé)
(Pozor na rozhodnutie, najprv si prečítajte nasledujúce vety, a potom sa zamyslite, či táto oznamovacia veta spĺňa vlastnosti výroku, či je jednoznačne formulovaná)
- k) Existuje pravouholník, ktorého dve susedné strany sú zhodné.
- l) V každom pravouholníku sú každé dve susedné strany zhodné.
- m) Nie je tu.
- n) $(x + 1)^2 = x^2 + 1$
- o) Niekde vo vesmíre existujú iné formy života.
- p) Obchod s textilom
- q) Národná banka Slovenska
- r) Zajtra bude v Dubnici pršať.

4. Nasledujúcim výrokom priradte pravdivostnú hodnotu „pravda“, „ nepravda“ symbolmi: p (1), n (0)

- a) Matematika je veda.
- b) Každý štvorec je štvoruholník.
- c) Každý štvoruholník je štvorec.
- d) $\sin 30^\circ = 2$.
- e) Ludolfovo číslo je racionálne číslo.
- f) $(-1)^2 = -1$

5. Sformulujte negácie výrokov a určte ich pravdivostné hodnoty.

- a) $3 + 7 = 10$
- b) $\sqrt{31} \neq 1 + \sqrt{21}$
- c) Číslo 1025 je druhou mocninou prirodzeného čísla.
- d) Nie je pravda, že $\sqrt{24}$ je dvojnásobkom $\sqrt{6}$.
- e) Hodnota výrazu $3x - 5$ pre číslo $x = 7$ je 15.

6. V nasledujúcich súvetiach možno nájsť časti, ktoré sú výrokmi. Nájdite tieto čiastkové výroky a slová, ktoré ich spojujú alebo uvádzajú.

- a) Anna sa učí a Viera hrá.
- b) $13 > 0$ a $13 < 20$
- c) Nie je pravda, že $\sqrt{9} = -3$
- d) Toto lietadlo letí z Košíc do Bratislavy priamo alebo (toto lietadlo) pristáva iba na Sliači.
- e) Keď číslo 13 je párne, potom 65 je párne číslo
- f) Číslo 1001 je deliteľné 13 práve vtedy, keď číslo 143 je deliteľné 13.

7. Zostavte vety, ktoré nie sú z rôznych dôvodov výrokmi. Potom rozhodnite, či sú tieto vety výrokmi:

- a) Zotri tabuľu a choď si sadnúť.
- b) Keď nemáš čo povedať, mlč.
- c) Keď nechceš ísť do kina, pôjdeš už domov?

8. Vyjadrite pomocou logických spojok obsah týchto správ o počasí.

- a) Neprší ani nefúka vietor.
- b) Je zamračené, ale neprší.
- c) Dnes sneží, zatiaľ čo včera pršalo.
- d) Oteplilo sa, ale napriek tomu je mráz.
- e) Husto prší, dokonca aj hrmí.
- f) Dážď ustal, ale stále mrholí.

9. Svedok vyslovil na súde výrok: „ Ak je obžalovaný A vinný, potom je vinný i obžalovaný B“. Predstavte si štyri možné výroky o vine obžalovaných A a B

- | | |
|-------------------------------|-----------------------------------|
| a) A je vinný, B je vinný | b) A je vinný, B nie je vinný |
| c) A nie je vinný, B je vinný | d) A nie je vinný, B nie je vinný |

V ktorých prípadoch a) až d) priznáte svedkovi, že povedal pravdivý výrok a že ho nemožno upodozrievať z nepravdivého svedectva?

10. Mama povedala svojmu synovi Petrovi: „ Ak budeš dobrý, dostaneš zmrzlinu“. Sú štyri možnosti:

- | | |
|---------------------------------------|---|
| a) Peter bol dobrý, dostal zmrzlinu | b) Peter bol dobrý, nedostal zmrzlinu |
| c) Peter nebol dobrý, dostal zmrzlinu | d) Peter nebol dobrý, nedostal zmrzlinu |

V ktorých prípadoch a) až d) vyslovila mama pravdivý výrok?

11. Nájdite v nasledujúcich vetách kvantifikátory. Doplňte tieto vety vhodnými kvantifikátormi tak, aby boli pravdivými výrokmi.

- a) Niektoré prirodzené čísla sú prvočísla
- b) Žiadny trojuholník nemá dva tupé uhly.
- c) Každému trojuholníku možno opísať práve jednu kružnicu.
- d) Existuje aspoň jedno párne prvočíslo.
- e) Ťažnice trojuholníka sa pretínajú v jednom bode.
- f) V kružnici sú zhodné všetky jej priemery.
- g) Štvoruholníky, ktoré majú zhodné uhlopriečky, sú rovnobežníky.

12. Sformulujte negáciu výrokov:

- | | |
|---------------------------|---------------------------------|
| a) Nikto mu nezávidí. | f) Všetci sme odišli. |
| b) Ktosi nám závidí. | g) Nikto učený z neba nespadol. |
| c) Každý sa mýli. | h) Všetci sme nepoučiteľní. |
| d) Nič sme nespozorovali. | i) Ktokoľvek môže odísť. |
| e) Niekoľko prehovoril. | j) Nikto nikoho nevidel. |

7. Množiny, Vennove diagramy

Pojem **množina** je jeden zo základných pojmov modernej matematiky.

Množina je súbor navzájom rôznych (rozlíšiteľných) matematických alebo iných objektov.

- množina všetkých prirodzených čísel,
- množina všetkých celých čísel menších ako 7,
- množina všetkých žiakov vašej školy nosiacich okuliare, ...

Množiny sa väčšinou označujú veľkými písmenami, napr. A, B, N a ich obsah (objekty) sa zapisujú do zložených zátvoriek.

Napr. množinu A obsahujúcu práve dva objekty a, b zapíšeme $A = \{a, b\}$.

Objekty, ktoré patria do danej množiny nazývame **prvky** množiny. Obvykle ich označujeme malými písmenami $x, y, c, \dots$.

Množinu môžeme považovať za určenú jedine vtedy, ak o každom objekte vieme jednoznačne povedať, či do danej množiny patrí alebo nie.

Rovnosť množín: Množiny A a B sa rovnajú, keď každý prvok množiny A patrí množine B a každý prvok množiny B patrí množine A.

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x: x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Inklúzia množín: Množina A je podmnožinou množiny B práve vtedy, ak všetky prvky množiny A patria zároveň aj množine B.

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x: x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Zjednotenie množín: Zjednotením množín A a B nazývame množinu $A \cup B$, ktorá obsahuje prvky patriace aspoň do jednej z množín A, B, teda obsahuje prvky, ktoré patria do množiny A alebo do množiny B a okrem nich neobsahuje žiadne iné prvky.

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

Prienik množín: Prienikom množín A a B nazývame množinu $A \cap B$, ktorá obsahuje všetky prvky patriace súčasne do oboch množín A, B. Ak je prienikom množín A, B prázdna množina ($A \cap B = \emptyset$), nazývame množiny A, B **disjunktnými**.

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$$

Rozdiel množín: Rozdielom množín A a B nazývame množinu $A - B$ ($A \setminus B$), ktorá obsahuje tie prvky množiny A, ktoré súčasne nepatria do množiny B.

$$x \in A - B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$$

Doplnok (komplement) množiny: Doplnok množiny A vzhľadom na množinu U je množina $A'_{\cup}$ všetkých prvkov množiny U, ktoré nepatria do množiny A.

$$A'_{\cup} = U - A \quad x \in A'_{\cup} \Leftrightarrow (x \in U \wedge x \notin A)$$

Na názornú predstavu množín, množinových vzťahov a operácií medzi množinami sa používajú ich grafické znázornenia v rovine, tzv. množinové diagramy.

Základná množina Z sa znázorňuje spravidla obdĺžnikom a jej podmnožiny A , B , ... ako kruhy alebo iné zvyčajne oválne obrazce vnútri obdĺžnika. Tieto grafické znázornenia sa nazývajú **Vennove diagramy**. K znázorneniu množín reálnych čísel sa zvyčajne používa **číselná os**.

Úloha

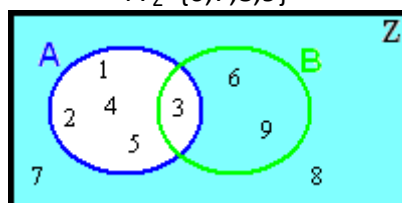
Daná je základná množina $Z = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ a jej podmnožiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $B = \{3, 6, 9\}$. Znázornite pomocou Vennových diagramov a zapíšte vymenovaním prvkov nasledovné množiny:

- doplňok množiny A vzhľadom k množine Z
- $A \cup B$
- $A \cap B$
- $A - B$

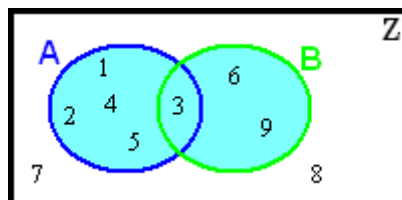
Riešenie

- Doplňok množiny A vzhľadom k množine Z tvoria všetky prvky patriace množine Z a zároveň nepatriace množine A , čiže:

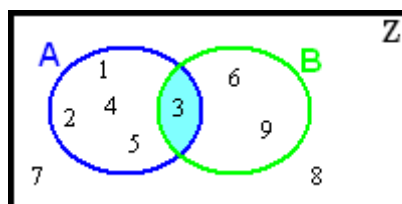
$$A'_Z = \{6, 7, 8, 9\}$$



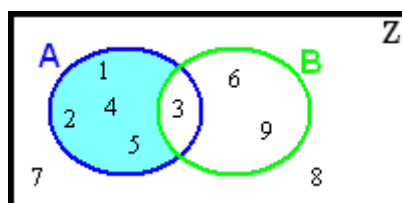
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$



- $A \cap B = \{3\}$



- $A - B = \{1, 2, 4, 5\}$



Úlohy na precvičenie

1. Charakteristickou vlastnosťou určte množinu: $A = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$.
2. Zistite, ktoré čísla sú prvkami množiny $A = \{x \in \mathbb{Z}; |x + 2| \leq 2\}$.
3. Dané sú množiny: $A = \{x \in \mathbb{Z}; x^2 < 10\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}; 3 \mid x \wedge x < 17\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z}; x^2 = 1 \vee 2 \mid x \mid < 5\}$. Vymenovaním prvkov určte množiny $A, B, C, A \cap B, B \cup C, CA'$.
4. Určte vzťahy medzi množinami A, B, C, D . Množiny a vzťahy medzi nimi znázornite pomocou Vennových diagramov. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{2, 5\}$, $D = \{6, 2, 4\}$.
5. A, B sú dve podmnožiny množiny M , pričom A je nekonečná množina a B je konečná množina. Ktorý z nasledujúcich výrokov je potom nepravdivý?
 - a) $A \cup B$ je nekonečná množina
 - b) $A \cap M = M$
 - c) $A \cap B_{M'}$ je nekonečná množina
 - d) $A \cap B$ je konečná množina
 - e) $A \cup M = M$
6. Čo najjednoduchšie zapíšte množiny:
 - a) $(2, 6) \cap \langle 4, \infty \rangle$
 - b) $(2, 6) \cap (10, \infty)$
 - c) $(2, 6) \cup \langle 4, \infty \rangle$
 - d) $(-\infty, 3) \cup (0, \infty)$
 - e) $(-\infty, 2) \cup (6, \infty)$
 - f) doplnok intervalu $(-\infty, 3>$ v množine $\mathbb{R}$
 - g) zjednotenie doplnku intervalu $(5, \infty)$ v množine $\mathbb{R}$ s intervalom $\langle 0, 10 \rangle$
 - h) prienik doplnku intervalu $\langle 1, 5 \rangle$ v množine $\mathbb{R}$ s intervalom $\langle 2, 10 \rangle$
 - i) prienik zjednotenia intervalov $(-\infty, 3), \langle 0, 5 \rangle$ v množine $\mathbb{R}$.
7. Pomocou intervalov zapíšte množinu:
 - a) $A = \{x \in \mathbb{R}; x \leq 2\}$,
 - b) $B = \{x \in \mathbb{R}; 3x \geq 8 \wedge 5x < 29\}$,
 - c) $C = \{x \in \mathbb{R}; |x - 2| < 3\}$,
 - d) $D = \{x \in \mathbb{R}; |x - 1| \geq 4\}$
8. Charakteristickou vlastnosťou zapíšte množinu:
 - a) $A = (-\infty, 5\rangle$,
 - b) $B = (-2, 7\rangle$,
 - c) $C = (-\infty, -1\rangle \cup (3, +\infty)$,
 - d) $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
9. Dané sú množiny $A = \langle -2, 7 \rangle$, $B = (0, 10\rangle$, $C = \{x \in \mathbb{R}; x > 2\}$.
Pomocou intervalov zapíšte množiny: $A \cap B, A \cup B, A \cap C, B \cup C, A_{R'}, C_{R'}$.
10. Určte tieto množiny:
 - a) $(-\infty; 3) \cap (-2; \infty)$
 - b) $\langle 1; \infty \rangle' \cup (-4; 5)$
 - c) $\{x \in \mathbb{N}; x^2 > 10\} \cap \{x \in \mathbb{R}; |x| \leq 6\}$
11. Na Vennovom diagrame znázornite tieto množiny:
 - a) $(A' \cap B') \cup (A \cap B)$
 - b) $(A' \cap C) \cup B$
12. Pomocou Vennových diagramov overte rovnosť množín:
 - a) $(A \cup B)', A' \cap B'$
 - b) $A \cap (B \cup C)', (A \cap B') \cap (A \cap C')$

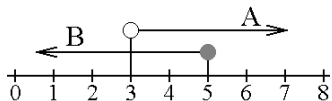
13. V triede je 38 žiakov, 16 z nich pretekalo v behu, 20 v plávaní. Žiadneho z týchto pretekov sa nezúčastnilo 10 žiakov. Koľko žiakov behalo aj plávalo?

14. Z 35 žiakov dochádza vlakom 8 žiakov, autobusom 10 žiakov a 21 žiakov nedochádza ani vlakom ani autobusom. Koľko žiakov dochádza aj vlakom aj autobusom?

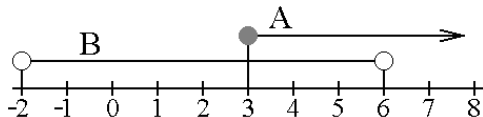
15. Po maturitách sa ukázalo, že 14 študentov dostalo jednotku aspoň z jedného z predmetov matematiky, fyziky. Osem z nich malo jednotku z fyziky a traja z oboch predmetov. Koľko percent študentov malo jednotku z matematiky?

16. Zapište množiny pomocou intervalov:

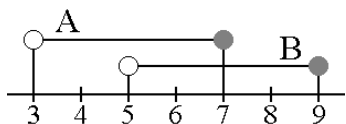
a)



b)



c)



A =

B =

$A \cap B =$

$A \cup B =$

$A - B =$

$B - A =$

A =

B =

$A \cap B =$

$A \cup B =$

$A - B =$

$B - A =$

A =

B =

$A \cap B =$

$A \cup B =$

$A - B =$

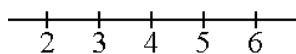
$B - A =$

17. Načrtnite na číselnej osi a určte:

a)

$$P = (2; 4)$$

$$Q = (2; 6)$$

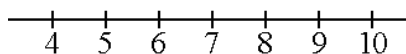


$$P \cap Q =$$

b)

$$P = \langle 1; 5 \rangle$$

$$Q = \langle 3; 7 \rangle$$



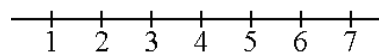
$$P \cup Q =$$

$$P - Q =$$

c)

$$P = \langle 4; 10 \rangle$$

$$Q = (6; 9)$$



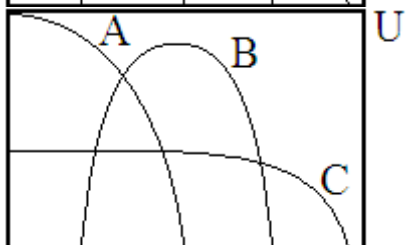
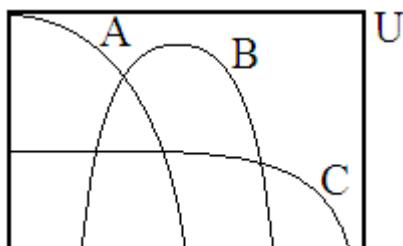
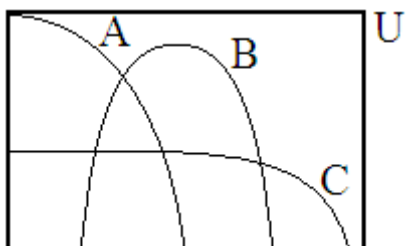
$$Q - P =$$

18. Na Vennových diagramoch vyznačte množinu X.

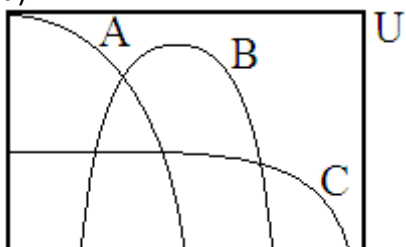
a) $X = A \cap B$

b) $X = B \cap C$

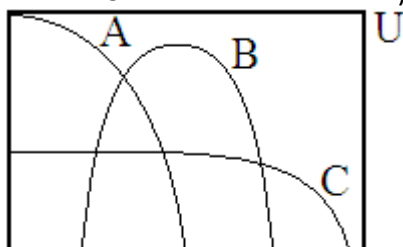
c) $X = A \cap C$



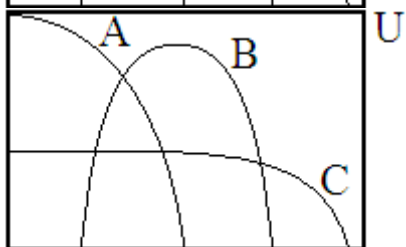
d) $X = A \cup B$



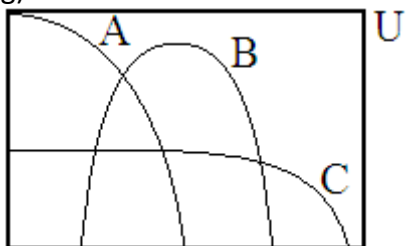
e) $X = B \cup C$



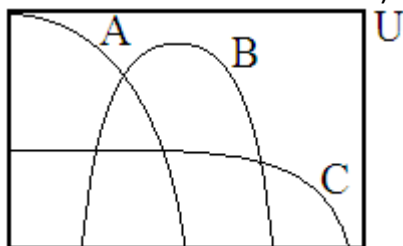
f) $X = A \cup C$



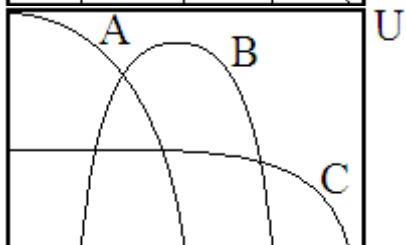
g) $X = A'$



h) $X = B'$



i) $X = C'$

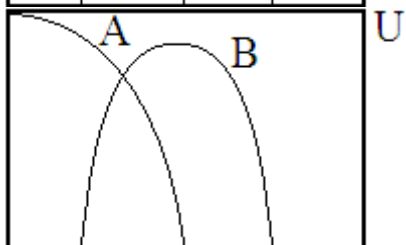
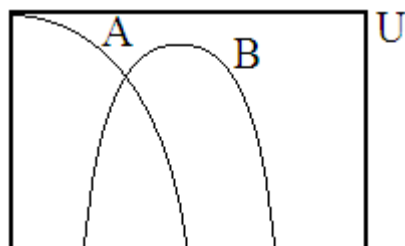
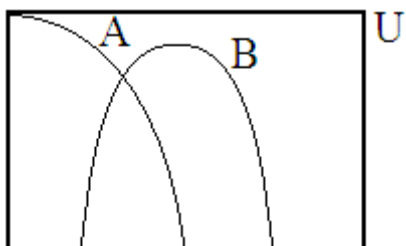


19. Na Vennových diagramoch vyznačte množinu G.

a) $G = A' \cap B$

b) $G = A \cap B'$

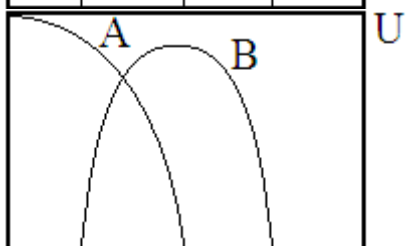
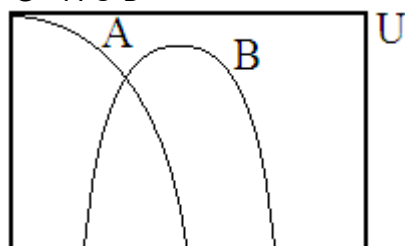
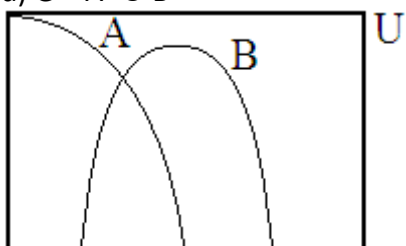
c) $G = A' \cap B'$



d) $G = A' \cup B$

e) $G = A \cup B'$

f) $G = A' \cup B'$

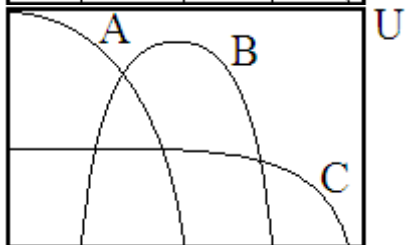
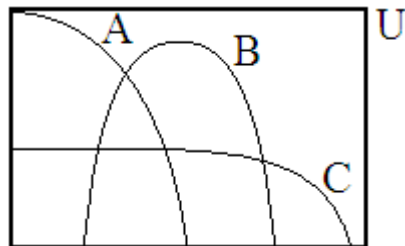
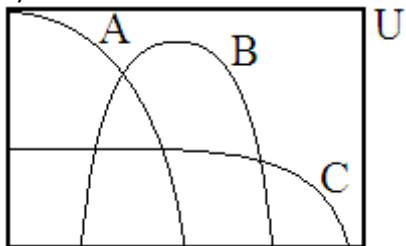


20. Na Vennových diagramoch vyznačte množinu Y.

a) $Y = A \cap B \cap C$

b) $Y = A \cup B \cup C$

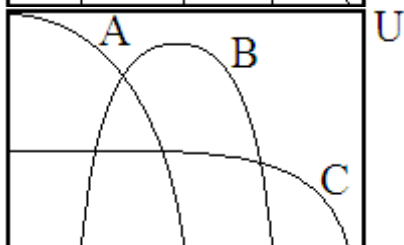
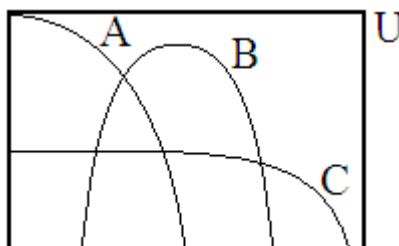
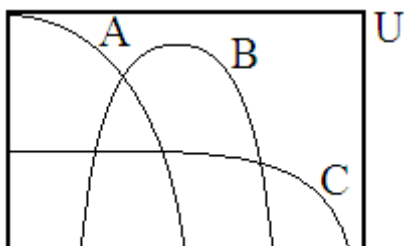
c) $Y = (A - C) \cap B$



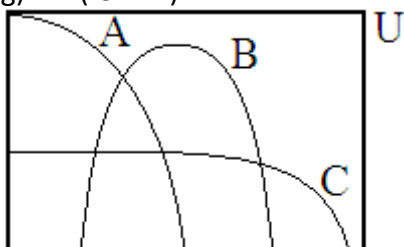
d) $Y = (A \cap B) \cup C$

e) $Y = A \cap (B \cup C)$

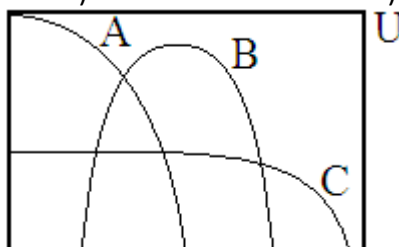
f) $Y = (A - B) \cap (B \cup C)$



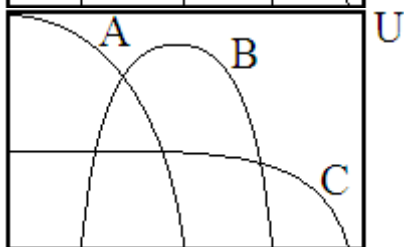
g) $Y = (C - A) \cap B'$



h) $(A \cap B)'$



i) $(A' - C) \cup B$



20. Na recepcii každý ovláda aspoň jeden cudzí jazyk, 15 ľudí hovorí po anglicky, 12 po nemecky a 7 obidvoma jazykmi. Z koľkých ľudí sa skladá táto spoločnosť, ak v spoločnosti nikto iný jazyk neovláda?

21. Z 35 žiakov odoberá denník SME 8 žiakov, Pravdu 10 žiakov, 21 žiakov neodoberá žiadne z týchto novín. Koľko žiakov odoberá obidvoje noviny?

22. Za jeden deň opravili v autodielni na 46 autách 24 chýb na brzdách a 36 chýb na motore. Koľko áut malo chybu len na brzdách a koľko len na motore?

23. Prieskum čitateľských záujmov ukázal, že 60% žiakov číta časopis A, 50% časopis B, 50% časopis C, 30% časopis A aj B, 20% časopis B aj C, 30% časopis A aj C a 10% všetky tri časopisy. Koľko % žiakov číta práve dva časopisy a koľko % nečíta ani jeden z týchto časopisov?

8. Funkcia a jej vlastnosti

Funkcia je jeden z najdôležitejších matematických pojmov. Používa sa nielen v matematike, ale aj vo fyzike a ďalších technických a iných oboroch.

Fyzikálne zákony sa vyjadrujú vo forme **funkčnej závislosti** jednej veličiny (tzv. **závislá premenná**) na druhej veličine (tzv. **nezávislá premenná**). Často sa jednoducho hovorí: „Prvá veličina je funkciou druhej veličiny“, napr. dráha je funkciou času, a pod.

Funkčnou závislosťou vo **fyzike** rozumieme jednoznačný **vzťah medzi fyzikálnymi veličinami**, kým v **matematike** je to len **jednoznačné priradenie medzi číselnými hodnotami premenných**.

Nech **A, B** sú neprázdne množiny reálnych čísel ($A \subset \mathbb{R}, B = \mathbb{R}$). Ak ku každému číslu $x \in A$ priradíme PRÁVE JEDNO $y \in B$, tak dostaneme množinu f usporiadaných dvojíc $[x, y]$ reálnych čísel, ktorá sa nazýva **reálna funkcia reálnej premennej x** .

x – premenná resp. argument funkcie f ; **nezávislá premenná**

y – hodnota premennej resp. argumentu; často hovoríme i funkčná hodnota v bode x (alebo hodnota funkcie f v bode x), **závislá premenná** a označujeme ju i **$f(x)$** alebo používame zápis $y = f(x)$.

$D(f)$ resp. **D_f** označuje **definičný obor funkcie f** , čo je množina všetkých hodnôt premennej x , teda v našom prípade množiny **A**.

$H(f)$ resp. **H_f** označuje **obor hodnôt funkcie f** , čo je množina všetkých hodnôt funkcie f .

Funkcia môže byť daná

a) **analyticky** – vzorcom, t.j. rovnicou v tvare $y = f(x)$, kde $f(x)$ je výraz s premennou x , napr. $y = 2x - 7$ alebo $y = x + x - 3$

b) **graficky** – grafom funkcie

c) **vymenovaním usporiadaných dvojíc** – spravidla vo forme tabuľky. Tento spôsob je použiteľný jedine pre funkcie, ktorých definičný oborom je konečná množina.

Pri niektorých funkciách môžeme hovoriť, že majú určité spoločné vlastnosti a podľa týchto vlastností ich aj nazývame.

Na základe týchto vlastností teda hovoríme o

- párnych a nepárnych funkciách
- periodických funkciách
- funkciách, ktoré sú zdola alebo zhora ohraničené
- extrémoch funkcií – maximálnych a minimálnych hodnotách
- monotónnych funkciách (rastúce, klesajúce, nerastúce a neklesajúce)
- prostých funkciách
- inverzných funkciách

Nech pre funkcie f s definičným oborom $D(f)$ platí:

$x \in D(f)$ a zároveň $-x \in D(f)$

V takom prípade rozlišujeme dva významné typy funkcií: **párnu funkciu** a **nepárnu funkciu**.

Párna funkcia:

Funkciu f nazývame **párnou** práve vtedy, keď pre každé $x \in D(f)$ platí:

$$f(-x) = f(x)$$

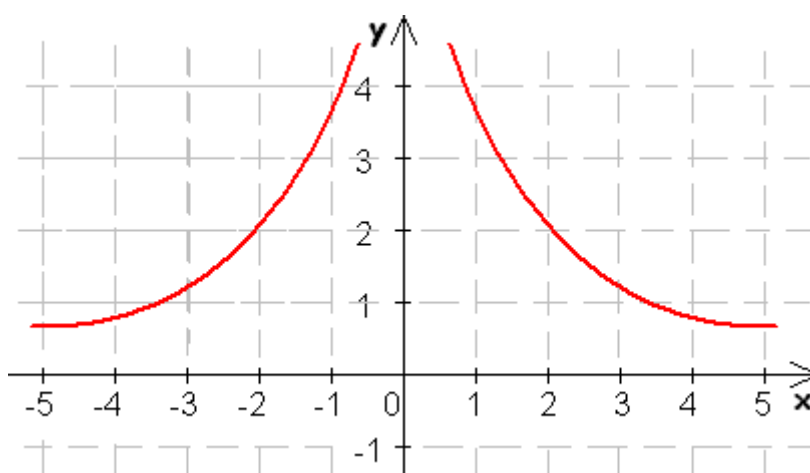
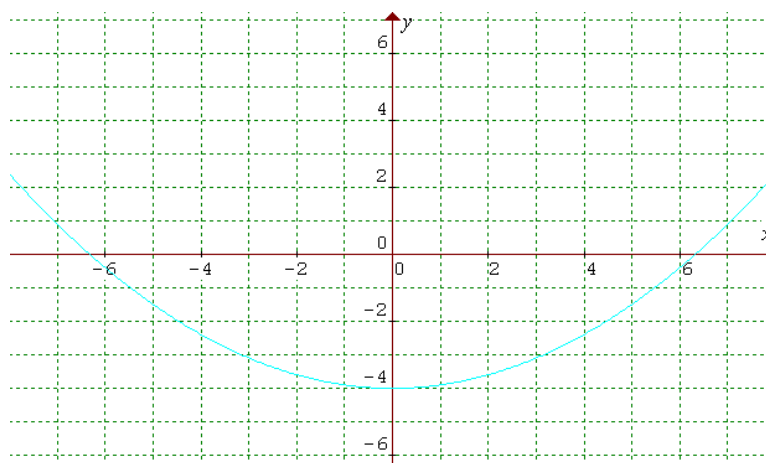
Funkciu f nazývame **nepárnou** práve vtedy, keď pre každé $x \in D(f)$ platí:

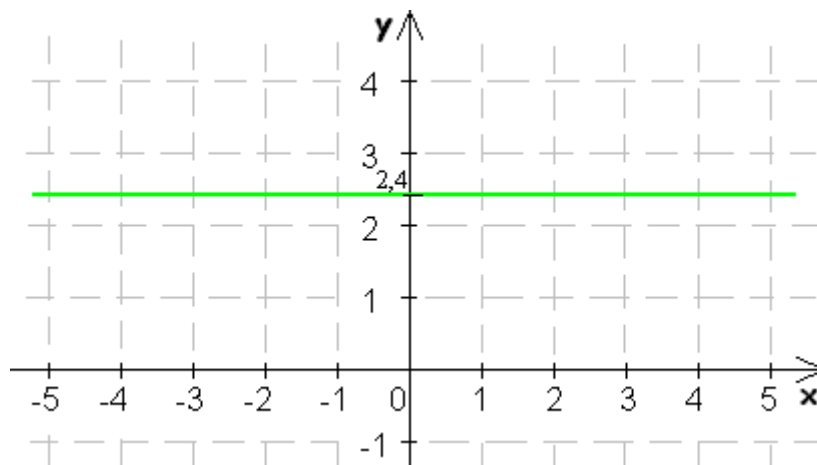
$$f(-x) = -f(x)$$

Ako zistíme, či je funkcia **párna** alebo **nepárna**, ak poznáme iba jej graf?

Funkcia je **párna**, ak jej graf je osovo súmerný podľa osi y .

Napríklad:





Funkcia je **nepárna**, ak jej graf je stredovo súmerný podľa bodu $[0, 0]$.

O dvoch funkciách f a g hovoríme, že **sú si rovné** práve vtedy, keď definičný obor funkcie f a definičný obor funkcie g sú tie isté množiny a pre každé $x \in D(f)$ platí: $f(x) = g(x)$.

Rovnosť dvoch funkcií f a g zapisujeme: $f = g$

O funkciách, ktoré **nie sú si rovné** hovoríme, že sú **rôzne** a zapisujeme $f \neq g$.

Funkciu f nazývame **periodická funkcia** práve vtedy, keď existuje také reálne číslo $p \neq 0$, že pre každé $x \in D(f)$ je aj $x \pm p \in D(f)$ a platí:

$$f(x \pm p) = f(x)$$

Číslo p nazývame **perióda funkcie** f .

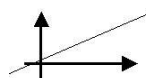
Vo fyzike sa perióda označuje T .

Ak má daná funkcia f periódu p , ľahko dokážeme, že pre každé celé číslo k platí: $f(x + kp) = f(x)$.

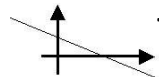
Teda daná funkcia má i periódu kp .

Monotónnosť

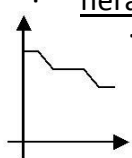
• rastúca
• rastúca na množine M , ak pre každé dve $x_1, x_2 \in D(f)$:
 $x_1 < x_2$ a $f(x_1) < f(x_2)$



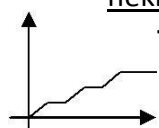
• klesajúca
• klesajúca na množine M , ak pre každé dve $x_1, x_2 \in D(f)$:
 $x_1 < x_2$ a $f(x_1) > f(x_2)$



• nerastúca
• nerastúca na množine M , ak pre každé dve $x_1, x_2 \in D(f)$:
 $x_1 < x_2$ a $f(x_1) \geq f(x_2)$



• neklesajúca
• neklesajúca na množine M , ak pre každé dve $x_1, x_2 \in D(f)$:
 $x_1 < x_2$ a $f(x_1) \leq f(x_2)$



- konštantná
 - konštantná na množine M , ak pre každé dve $x_1, x_2 \in D(f)$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$
 - konštantná funkcia má ľubovoľnú periódu – je periodická
- Ak funkcia f rastie alebo f klesá – je rýdzo monotónna.

Prostá funkcia

- f funkcia je prostá ak pre každé dve $x_1, x_2 \in D(f)$: $x_1 \neq x_2$ tak $f(x_1) \neq f(x_2)$
- napr. $y = x^3$
- existuje inverzná funkcia
- **ohraničenosť:**
 - zhora: $\exists h \in \mathbb{R}, \forall x \in D(f): f(x) \leq h$
 - zdola: $\exists d \in \mathbb{R}, \forall x \in D(f): f(x) \geq d$
 - funkcia je ohraničená, ak je súčasne ohraničená zhora aj zdola $d \leq f(x) \leq h$
 - napr. $y = \sin x$ ($h = 1, d = -1$)
 - najmenšie horné ohraničenie je supréмум
- **lokálne extrém:** nech funkcia f je definovaná v okolí bodu a :
 - maximum:
 - maximum v bode a má funkcia,
 - ak existuje také okolie O bodu a ; $\forall x \in O: f(x) \leq f(a)$
 - minimum:
 - minimum v bode a má funkcia,

Úlohy na precvičenie

1. Rozhodnite, ktorá z uvedených tabuliek jej zadaním funkcie. U zistenej funkcie určte definičný obor a obor hodnôt.

a)

x	1	2	-	2	1	-
y	6	4	2	4	5	2

b)

x	1	4	-	0	-	2
y	3	3	1	1	1	3

c)

x	-	4	-	3	-	1
y	2	6	1	5	1	3

2. Rozhodnite, ktorá z uvedených množín jej zadaním funkcie. U zistenej funkcie určte definičný obor a obor hodnôt.

a) $\{[1,-3], [2,-2], [3,-1], [6,2], [5,1], [4,0]\}$

b) $\{[-1,-1], [0,0], [1,1], [2,2], [3,3], [4,4]\}$

c)

$\{[1,5], [2,4], [3,5], [1,2], [2,1], [4,0]\}$

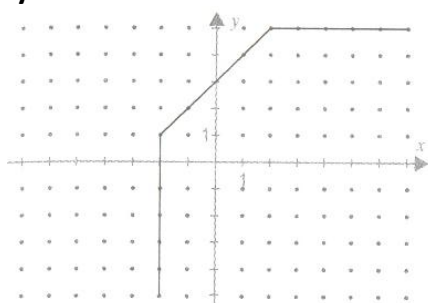
3. Rozhodnite, ktorá z uvedených rovníc jej zadaním funkcie. U zistenej funkcie určte definičný obor a obor hodnôt.

a) $x = y^2 - 6$

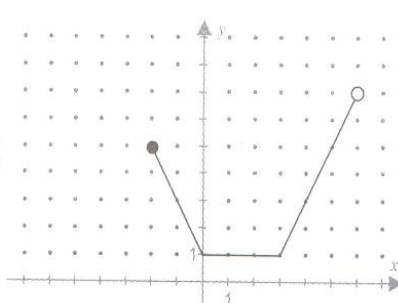
b) $y = 2x - 1$

c) $y = 2 - \sqrt{x^2 + 1}$

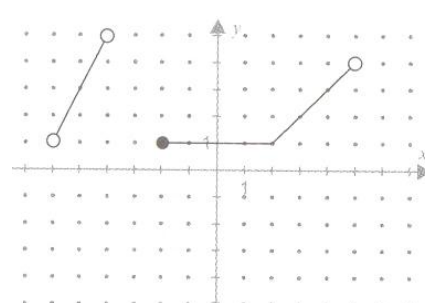
4. Rozhodnite, ktoré z grafov sú grafmi funkcie. Zapíšte definičný obor a obor hodnôt týchto funkcií.



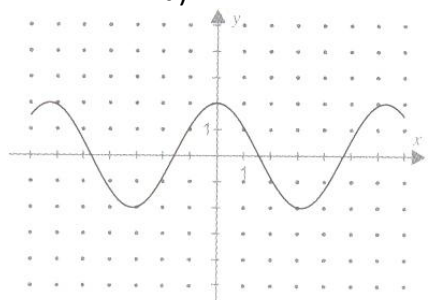
a)



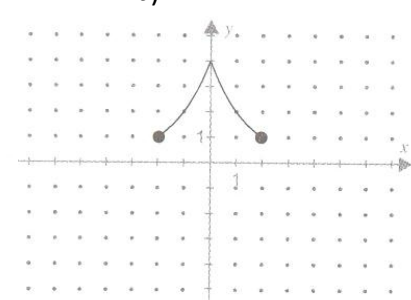
b)



c)



d)



e)

5. Určte definičný obor funkcie danej rovnicou.

a) $f_1 : y = 3x - 4$

b) $f_2 : y = x^3 + 2$

c) $f_3 : y = \frac{1}{x}$

d) $f_4 : y = \frac{3}{x+5}$

e) $f_5 : y = \frac{3}{(x-4)(2x+7)}$

f) $f_6 : y = \frac{\sqrt{2+x}}{x-3}$

$$g) f_7 : y = \frac{1}{\sqrt{x-7}}$$

$$h) f_8 : y = \sqrt{3x-4}$$

$$i) f_9 : y = \frac{x+5}{x^2+4x}$$

$$j) f_{10} : y = \frac{2x-15}{x^2+3}$$

$$k) f_{11} : y = 3x - \sqrt{2x}$$

$$l) f_{12} : y = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x}}$$

$$m) f_{13} : y = \sqrt{(2x-1)(5x-2)}$$

$$*n) f_{14} : y = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$$

$$o) f_{15} : y = \sqrt{\frac{2x-7}{5+4x}}$$

6. Dané sú funkcie:

a) Určte ich definičné obory:

$$f_1 : y = |x| - 2$$

$$f_2 : y = \frac{x-1}{x+1}$$

$$f_3 : y = \frac{x}{(x-2)(x-1)}$$

b) Rozhodnite či platí:

$$3 \in H(f_1), -5 \in H(f_1), 4 \in H(f_2), 1 \in H(f_2), 17,5 \in H(f_2), 1 \in H(f_3), 50 \in H(f_3)$$

7. Vypočítajte funkčné hodnoty $f(x)$ pre dané hodnoty premennej, ak je daná funkcia.

$$a) f_1 : y = x^2 - x - 6 \quad f(-2) = ? \quad f(5) = ? \quad f(0) = ?$$

$$b) f_2 : y = \frac{2x+1}{x^3-4} \quad f(-1) = ? \quad f(0) = ? \quad f(3) = ?$$

$$c) f_1 : y = 7 - 4x \quad f\left(\frac{2}{3}\right) = ? \quad f(-2) = ? \quad f(5) = ?$$

$$d) f_1 : y = x(x-3) \quad f(0) = ? \quad f(-4) = ? \quad f(8) = ?$$

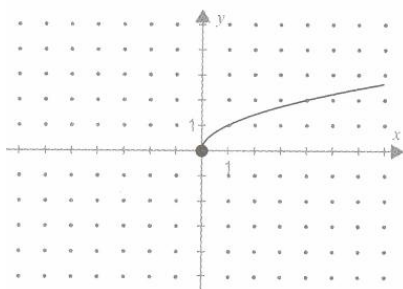
$$e) f_1 : y = \sqrt{x^2+2} \quad f(-7) = ? \quad f(0) = ? \quad f(3) = ?$$

8. Graficky zistite funkčné hodnoty, ak je daná funkcia f .

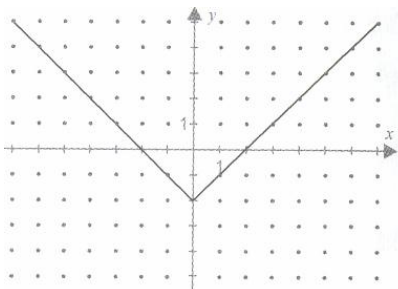
$$a) f(-1) = ? \\ f(4) = ?$$

$$b) f(-3) = ? \\ f(6) = ?$$

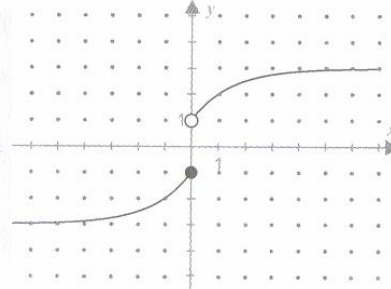
$$c) f(-1) = ? \\ f(7) = ?$$



a)



b)



c)

9. Vypočítajte súradnice priesečníkov grafu funkcie f so súradnicovými osami, ak je funkcia daná rovnicou.

$$a) f_1 : y = -2x$$

$$b) f_2 : y = \frac{2x+3}{4}$$

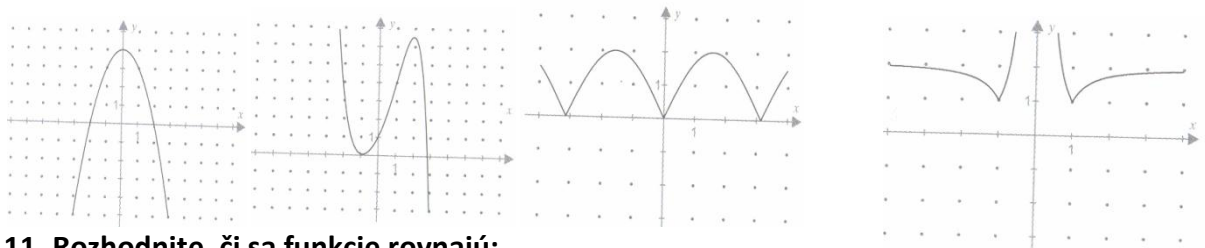
$$c) f_3 : y = 3 - \frac{6}{x+2}$$

$$d) f_4 : y = \frac{x+2}{2x-3} - 1$$

$$e) f_5 : y = \frac{2x+1}{x-4}$$

10. Graficky zistite, či existuje hodnota premennej x , pre ktorú je dané číslo $f(x)$ hodnotou funkcie f . Ak áno, určte ju z grafu.

- a) $f(x_1) = 3, f(x_2) = -1$
 b) $f(x_1) = -1, f(x_2) = 4$
 c) $f(x_1) = -2, f(x_2) = 2$
 d) $f(x_1) = 0, f(x_2) = -2$



11. Rozhodnite, či sa funkcie rovnajú:

- a) $f_1: y = x^2$ $f_2: y = \sqrt{x^4}$ b) $g_1: y = \frac{1}{x}$ $g_2: y = \frac{x}{x^2}$
 c) $h_1: y = 1$ $h_2: y = \frac{x}{x}$ d) $i_1: y = \sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$ $i_2: y = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}$
 e) $j_1: y = x-1$ $j_2: y = \frac{x^2-1}{x+1}$ f) $k_1: y = x+3$ $k_2: y = |x+3|$

12. Ktorá z uvedených funkcií sa rovná funkcii $f: y = (x^4)/(x^5)$? Zostrojte grafy funkcií .

- a) $y = 1/x$ b) $y = x$ c) $y = (x^7)/(x^6)$ d) $y = (x^2)/(x^4)$

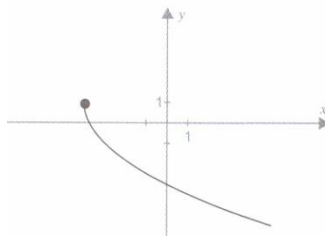
13. Na obrázku je graf funkcie g . Funkcia f , ktorá je časťou funkcie g je určená definičným oborom $D(f)$. Z grafu určte jej obor hodnôt $H(f)$ a zistite, či sú pravdivé tvrdenia o funkčných hodnotách funkcie f .

- a) $D(f) = \langle -3, 4 \rangle$

$$H(f) = ?$$

$$f(-3) = 1$$

$$f(0) = -3$$

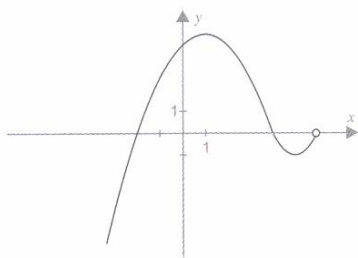


- b) $D(f) = \langle 1, 6 \rangle$

$$H(f) = ?$$

$$f(1) = 3$$

$$f(5) = -1$$

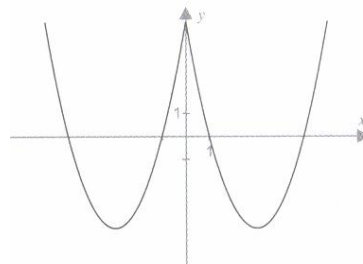


- c) $D(f) = \langle -6, 4 \rangle$

$$H(f) = ?$$

$$f(2) = -3$$

$$f(-4) = 1$$

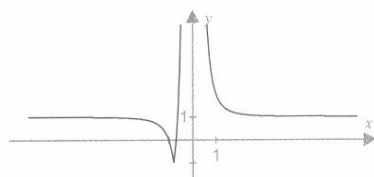


- d) $D(f) = (-2, 0)$

$$H(f) = ?$$

$$f(1) = 2$$

$$f(3) = 2$$



14. Zistite či funkcia je párna, nepárna resp. ani párna ani nepárna. Využite: párna: $f(-x) = f(x)$; nepárna: $f(-x) = -f(x)$; resp. neplatí ani jedna z možností

a) $f(x) = 3x - 4$

b) $f(x) = \frac{3-x}{2}$

c) $f(x) = 3x^2 + 2$

d) $f(x) = \sqrt{3x-4}$

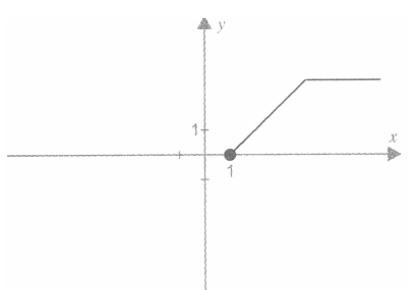
e) $f(x) = \frac{x+4}{x-1}$

f) $f(x) = \frac{2x^2 - x}{x^3}$

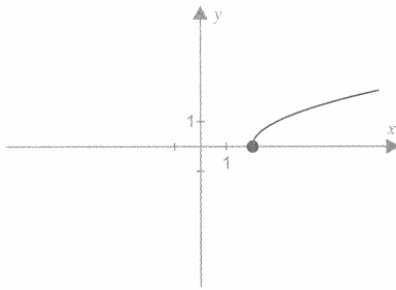
g) $f(x) = \frac{5}{x} - 2$

h) $f(x) = -4x^3$

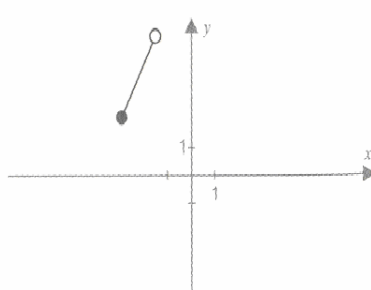
15. Dokreslite graf funkcie tak, aby funkcia bola párna.



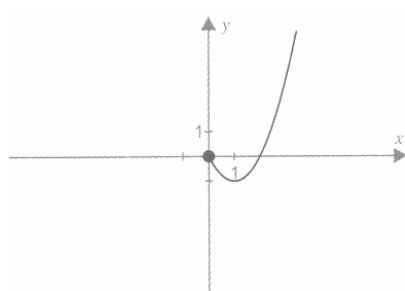
a)



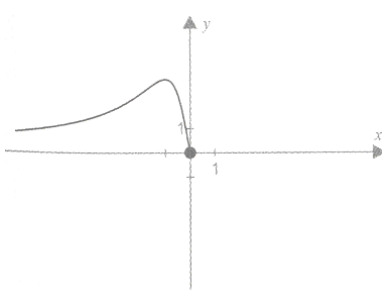
b)



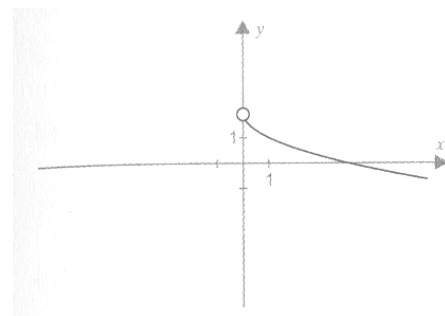
c)



d)

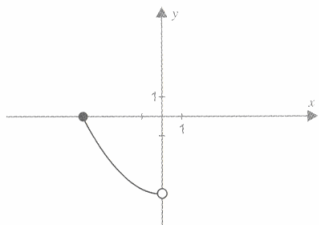


e)

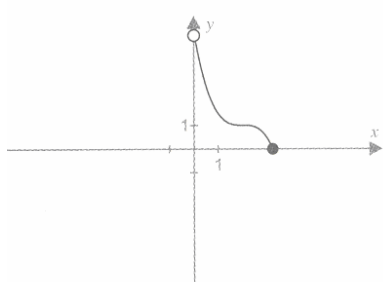


f)

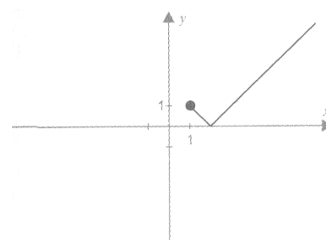
16. Dokreslite graf funkcie tak, aby funkcia bola nepárna.



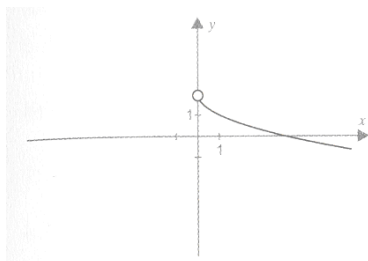
a)



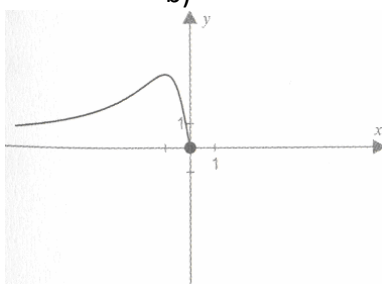
b)



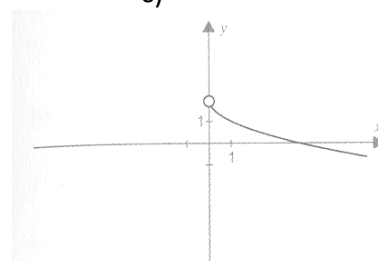
c)



d)



e)



f)

17. Rozhodnite na základe grafu , ktoré funkcie sú párne, a ktoré nepárne.

a) $f_1 : y = x$

b) $f_1 : y = x + 2$

c) $f_3 : y = \frac{x^2}{x^2 + 3}$

$$d) f_4 : y = \frac{1}{x^3}$$

$$e) f_5 : y = \frac{1}{x^4}$$

$$f) f_6 : y = 1 + \sqrt{x}$$

$$g) f_7 : y = \frac{|x| + 2}{x^3 - 8}$$

$$h) f_8 : y = \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^5}$$

18. Ktoré z daných funkcií sú prosté? Danú vlastnosť zistíte z grafu funkcie. Určte inverznú funkciu k prostým funkciám.

$$a) f_1 : y = x - 3$$

$$b) f_2 : y = x^2$$

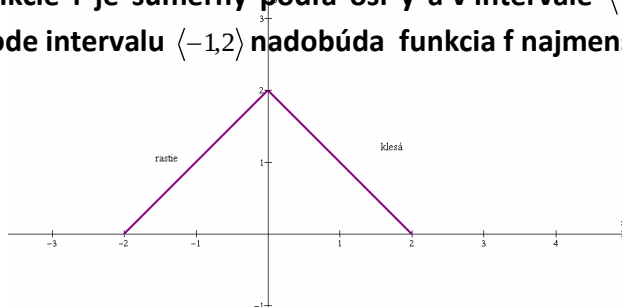
$$c) f_3 : y = \frac{1}{x}$$

$$d) f_4 : y = x$$

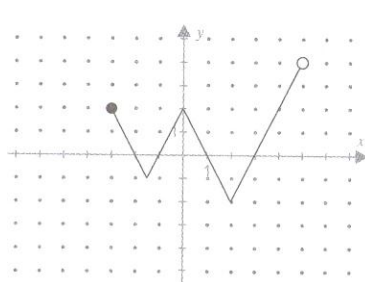
$$e) f_5 : y = \frac{x + 5}{3}$$

$$f) f_6 : y = \left| \frac{1}{x} \right|$$

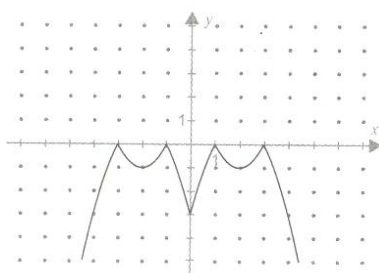
19. Graf funkcie f je súmerný podľa osi y a v intervale $\langle -2, 0 \rangle$ je takáto funkcia rastúca. V ktorom bode intervalu $\langle -1, 2 \rangle$ nadobúda funkcia f najmenšiu funkčnú hodnotu.



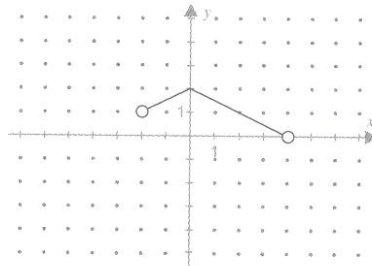
20. Zistite definičný obor, obor hodnôt a intervaly monotónnosti, ohraničenosť, extrémny funkcie f danej grafom.



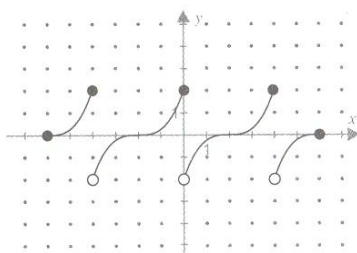
a)



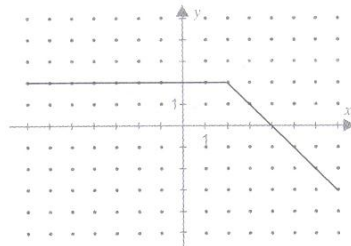
b)



c)



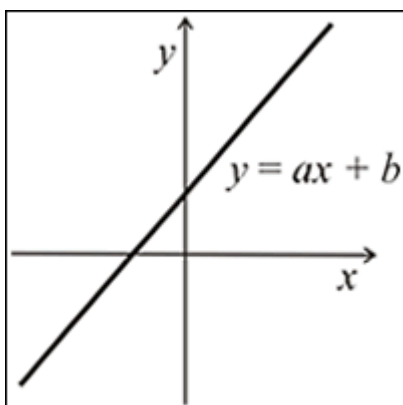
d)



e)

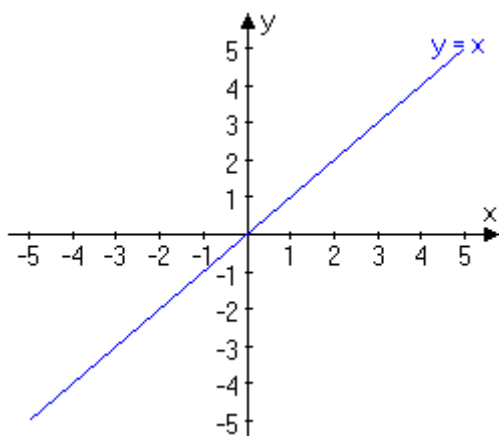
9. Lineárna a konštantná funkcia

Lineárna funkcia je každá funkcia určená predpisom $y = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $a \neq 0$



Grafom lineárnej funkcie je **priamka**.

$a > 0$, $b = 0$

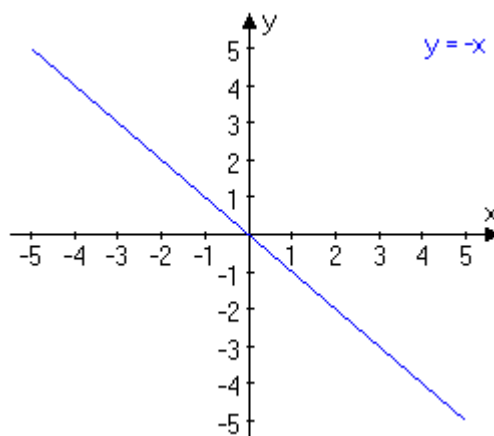


a)

$D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \mathbb{R}$

- rastúca

$a < 0$, $b = 0$



b)

$D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \mathbb{R}$

- klesajúca

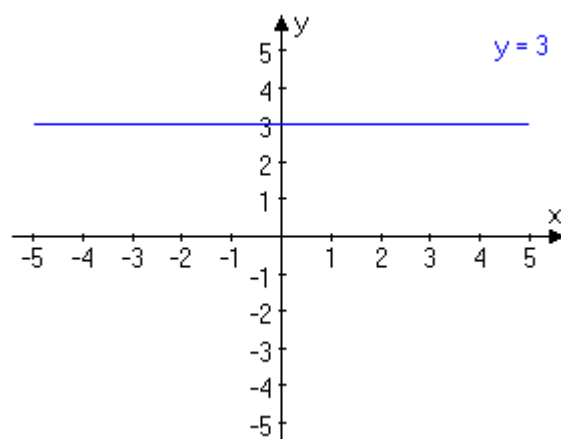
Na to, aby sme mohli zostrojiť graf lineárnej funkcie stačí poznať dva body so súradnicami, ktoré jej patria.

Konštantná funkcia je každá funkcia určená predpisom $y = b$, kde $b \in \mathbf{R}$. Grafom každej konštantnej funkcie f ak $D(f) = \mathbf{R}$ je priamka .

Vlastnosti funkcie :

$$D(f) = \mathbf{R}, \quad H(f) = \{b\}$$

- nie je prostá
- je ohraničená
- v každom bode $x \in \mathbf{R}$ má maximum aj minimum .



Úlohy na precvičenie

1. Uvedte príklady lineárnych funkcií, ktorých grafom je: a) priamka
b) polpriamka
c) úsečka

2. Nájdite aspoň dve usporiadané dvojice celých čísel, ktoré patria funkcii danej predpisom.

a) $f(x) = x + 3$ b) $f(x) = 5x - 4$ c) $f(x) = \frac{6-2x}{3}$

3. Výpočtom nájdite funkčnú hodnotu y alebo premennú x , tak aby $[x, y] \in f$.

a) $f(x) = x + 5$ $[x, 3]$ b) $f(x) = \frac{x+1}{3}$ c) $f(x) = \frac{2x}{3} - 4$

$[x, -12]$

4. Zistite, či usporiadaná dvojica čísel patrí funkcii.

a) $f(x) = x + 7$ $[-3, -4], [2, 9]$ b) $f(x) = \frac{2-x}{4}$ $[122, -30], [14, 4]$

5. Nájdite obor hodnôt funkcie f , ak je daný definičný obor.

a) $f(x) = x + 5$ $D(f) = (-11, \infty)$ b) $f(x) = 2x - 3$ $D(f) = \mathbb{N}$

c) $f(x) = 2 - 4x$ $D(f) = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ d) $f(x) = \frac{2-x}{4}$ $D(f) = \langle 0, 2 \rangle$

6. Vypočítajte priesečníky grafu lineárnej funkcie so súradnicovými osami, ak je funkcia daná predpisom.

a) $f(x) = 3x - 6$ b) $f(x) = \frac{5-2x}{2}$ c) $f(x) = 1 - \frac{x}{2}$

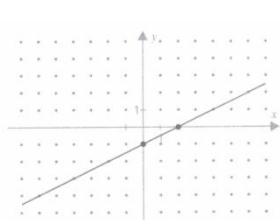
7. Určte rovnicu lineárnej funkcie, ktorej graf prechádza danými bodmi.

a) $A[1, 6]$ $B[10, -3]$ b) $C[0, 0]$ $D[-4, 3]$ c) $E[-3, 6]$ $F[4, -8]$

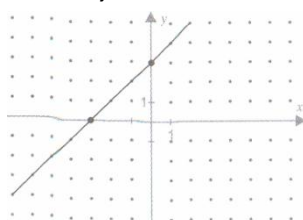
8. Určte rovnicu lineárnej funkcie, ktorá vyhovuje podmienkam.

- a) $f(4) = -3, f(3) = -4$
b) $y = ax + 2, f(4) = -2$
c) $y = x + b$, graf pretína os x v bode 3
d) $y = 0,5x + b, f(-4) = 2$
e) $y = ax - 5$, graf prechádza bodom $C[-4, -1]$
f) $y = ax$, graf prechádza bodom $B[2, 3]$

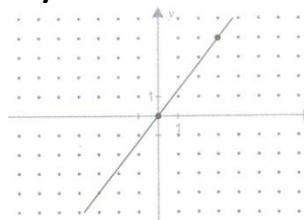
9. Určte rovnice lineárnych funkcií, ktoré sú dané graficky.



a)



b)



c)

10. Výpočtom zistite, či niektorý z bodov $A[0,2]$, $B[-1,0]$, $C[22,10]$, $D[-5,20]$, $F\left[-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right]$ leží na grafe funkcie: a) $y = \frac{1}{2}x - 1$ b) $y = \frac{4}{3}x$

11. Graf lineárnej funkcie prechádza bodmi: $A[-1,-4]$, $B[-3,-1]$.

a) Zostavte predpis funkcie f .

b) Určte priesečníky grafu funkcie f s osami súradnicovej sústavy.

12. Graf funkcie $f: y = 3 - x$ a súradnicové osi určujú trojuholník. Aký je jeho obsah.

13. Určte lineárnu funkciu g , ktorej graf je rovnobežný s grafom funkcie $f: y = 2x - 1$ a prechádza bodom $X[0,5]$

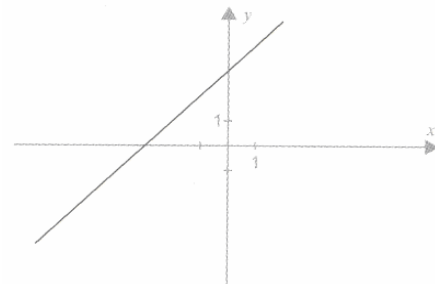
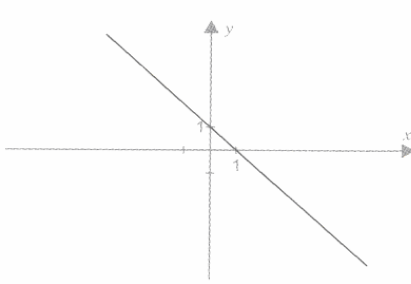
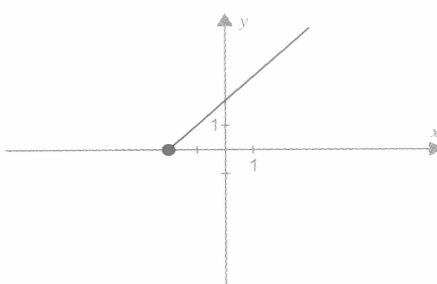
14. Určte inverznú funkciu k danej funkcii. Nájdite ej definičný obor a obor hodnôt oboch funkcií.

a) $f: y = x - 7$

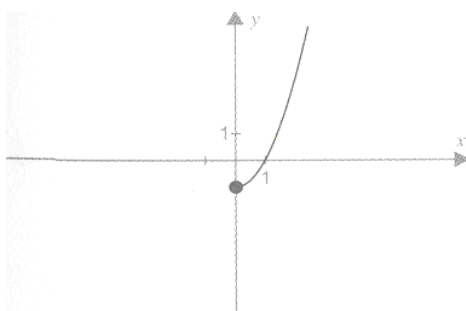
b) $f: y = 4 - 2x$

c) $f: y = \frac{x+5}{3}$

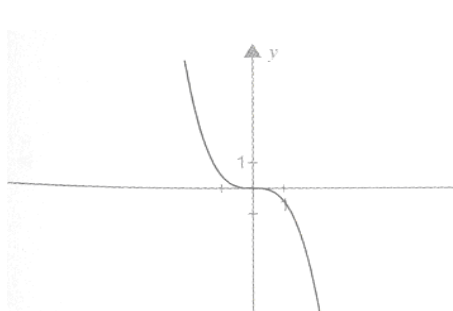
15. K daným grafom dokreslite graf inverznej funkcie.



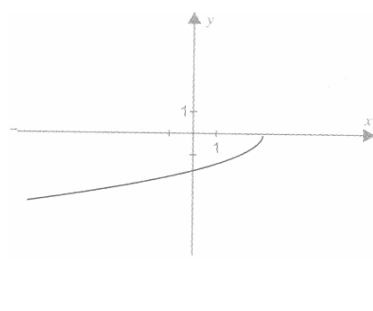
a)



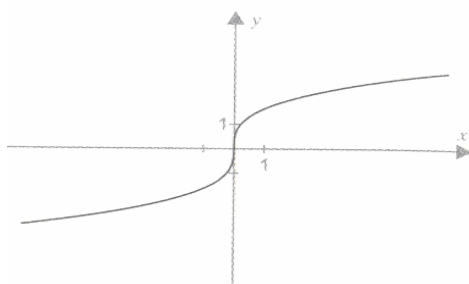
b)



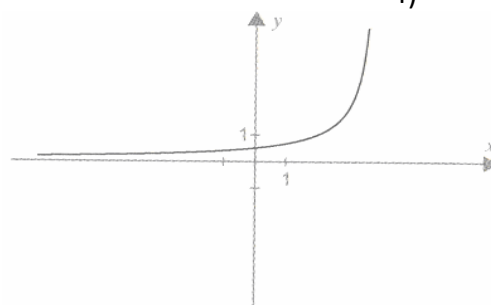
c)



d)



e)



f)

g)

h)

16. Uvažujme o funkcii $f: y = 0,5x + 2$, $x \in (-4,1)$. Určte definičný obor funkcie inverznej k tejto funkcii.

10. Lineárne rovnice, nerovnice, sústavy

Lineárnou rovnicou s neznámou x nazývame každú rovnicu tvaru $ax + b = 0$, kde a, b sú reálne čísla a $a \neq 0$.

Pri riešení môžu nastať tri prípady:

- ak $a \neq 0$, potom $ax = -b$ a rovnica má práve jeden koreň $x = -b/a$;
- ak $a = b = 0$, po úprave dostaneme $0 = 0$ a to je pravdivý výrok (rovnosť), takže pôvodná rovnica má nekonečne veľa riešení resp. koreňom tejto rovnice je každé reálne číslo;
- ak $a = 0, b \neq 0$, po úprave dostaneme $0 = -b$, a keďže $b \neq 0$, tak sme dostali nepravdivú rovnosť – pôvodná rovnica nemá žiadne riešenie.

Lineárnu rovnicu možno riešiť aj graficky. Grafické riešenie spočíva v tom, že si pomocou ekvivalentných úprav upravíme rovnicu na tvar $f_1(x) = f_2(x)$ alebo na tvar $f(x) = 0$.

V prvom prípade zostrojíme grafy funkcií f_1, f_2 , kde x -ové súradnice priesečníkov grafov predstavujú približné riešenie danej rovnice závislé od presnosti rysovania.

V druhom prípade zostrojíme graf funkcie $f(x)$ a približným riešením danej rovnice budú priesečníky s osou x .

V prípade lineárnej funkcie je samozrejme jednoduchšie využiť algebraické riešenie.

Lineárna nerovnica s neznámou $x \in \mathbb{R}$ je každá nerovnica tvaru $ax + b < 0, ax + b \leq 0, ax + b > 0, ax + b \geq 0$, kde a, b sú ľubovoľné reálne čísla.

Riešenie lineárnej nerovnice:

Nerovnicu upravíme tak, že odčítame b od oboch strán nerovnice, čím ju upravíme na tvar $ax < -b, ax \leq -b, ax > -b, ax \geq -b$. Pri riešení môžu potom nastať tri prípady:

Ak $a < 0$, potom z nerovnosti $ax < -b$ dostaneme $x > -\frac{b}{a}$

resp. z nerovnosti $ax > -b$ dostaneme $x < -\frac{b}{a}$;

Ak $a > 0$, potom z nerovnosti $ax > -b$ dostaneme $x > -\frac{b}{a}$

resp. z nerovnosti $ax < -b$ dostaneme $x < -\frac{b}{a}$;

Ak $a = 0$ potom $0 \cdot x < -b$ alebo $0 \cdot x > -b$. Táto nerovnica je splnená buď pre všetky $x \in \mathbb{R}$ alebo pre žiadne $x \in \mathbb{R}$.

Ekvivalentné úpravy nerovníc:

1. vzájomná výmena strán nerovnice so súčasnou zmenou znaku nerovnosti na obrátený;
2. nahradenie ľubovoľnej strany nerovnice výrazom, ktorý sa jej rovná v celom obore riešenia nerovnice, pričom znak nerovnosti sa nezmení;
3. pripočítaním toho istého čísla alebo výrazu s neznámou, ktorý je definovaný v celom obore riešenia, k oboj stranám nerovnice, pričom znak nerovnosti sa nemení;
4. vynásobenie oboj strán nerovnice kladným číslom alebo výrazom s neznámou, pričom znak nerovnosti sa nemení;
5. vynásobenie oboj strán nerovnice záporným číslom alebo výrazom s neznámou, pričom znak nerovnosti sa zmení v obrátený;
6. umocnenie oboj strán nerovnice prirodzeným mocniteľom, ak sú obe strany nerovnice nezáporné, pričom znak nerovnosti sa nemení;
7. odmocnenie oboj strán nerovnice prirodzeným odmocniteľom, ak sú obe strany nerovnice nezáporné, pričom znak nerovnosti sa nemení;
8. zlogaritmovanie oboj strán nerovnice pri tom istom základe väčšom ako 1, ak sú obe strany nerovnice kladné, pričom znak nerovnosti sa nemení.

Úlohy na precvičenie

1. Riešte v obore reálnych čísel rovnice:

a) $6x - 1 = 3(2 - x) + 9(x - 1) + 2$ b) $7 - 2x - \frac{1-3x}{7} = 2 - \frac{2x-1}{3}$
c) $x - \frac{x-1}{3} - \frac{2x-5}{5} + \frac{x+8}{6} = 7$ d) $\frac{x+7}{2x+2} - \frac{x+4}{4x+4} = 1$

2. Riešte v R rovnice s neznámou v menovateli:

a) $\frac{x-2}{x} = \frac{x+4}{x+3}$ b) $\frac{x^2-3x+8}{x-8} = x+53$
c) $\frac{1}{x-2} + \frac{x-5}{3x-6} = \frac{2}{3}$ d) $\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1}{x-1} - \frac{4x}{x^2-1}$

3. Riešte v N nerovnicu: $\frac{x+2}{3} - x > \frac{2x-3}{4} - \frac{7-3x}{5}$

4. Riešte v $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sústavu rovníc:

a) $\frac{12}{y+2} + \frac{3}{x-y} = 5$ b) $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \frac{5}{8}$
 $\frac{5}{x-y} - \frac{6}{y+2} = 4$ $\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = \frac{3}{8}$

5. Riešte v R sústavu nerovnic:

a) $3x - 8 < 2x + 4$ b) $\frac{3x-11}{4} + \frac{19-2x}{2} \leq 2x$
 $\frac{2x+7}{3} > \frac{5x+7}{7}$ $\frac{2x+15}{9} > \frac{x-1}{5} + \frac{x}{3}$

7. Riešte rovnice:

a) $|x-8| + 3 = 2x$ v množine R
b) $|6x+5| - |1-x| = 0$ v Z
c) $x - 2|3x+6| = 5 - 2x$ v R

8. Určte všetky reálne čísla x, pre ktoré dané zlomky nadobúdajú kladné hodnoty:

a) $\frac{x^2+3x}{2x-7}$ b) $\frac{2x-1}{x^2+2x-15}$

10. Riešte v R nerovnice:

a) $\frac{x^2-7x+10}{x^2-10x+21} \leq 0$ b) $\frac{2}{3} \leq \frac{2+x}{3+x}$
c) $(x+2) \cdot (x-9) \cdot (-x+2) > 0$ d) $(-6+x) \cdot (-5-2x) \cdot (4x-2) \leq 0$
e) $\frac{3x+1}{2-x} \geq -1$ riešte aj v množine Z

11. Otec je o 8 rokov starší než trojnásobok synovho veku. O 20 rokov bude otec dvakrát taký starý ako jeho syn. Koľko rokov má otec a koľko syn?

12. Sumu 440 eur rozdeľte na tri časti tak, aby 40% prvej časti sa rovnalo 50% druhej časti a súčet druhej a tretej časti sa rovnal prvej časti.
13. V izbe je 18 štvornohých a trojnohých stoličiek. Spolu je v izbe 65 nôh. Koľko je trojnohých a koľko štvornohých stoličiek ?

11. Kvadratická funkcia

Kvadratická funkcia je funkcia daná rovnicou:

$$y = ax^2 + bx + c$$

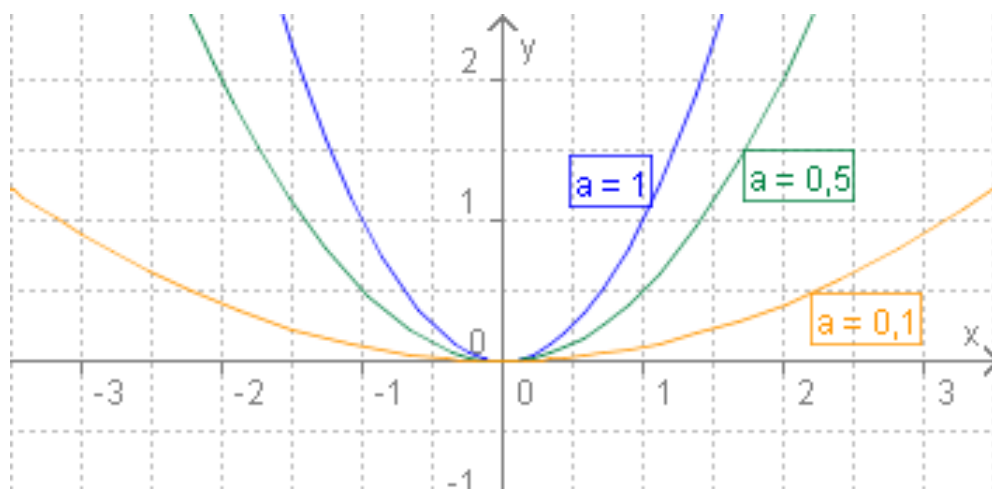
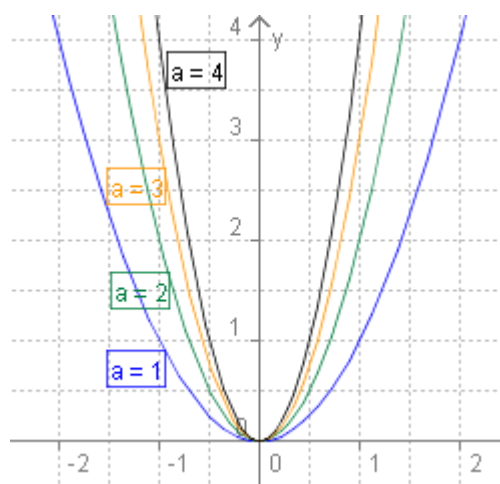
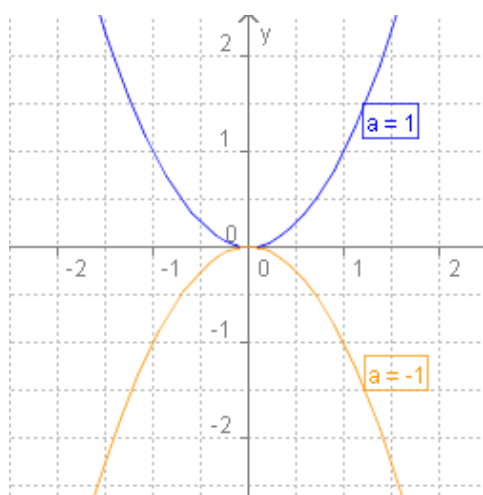
kde a , b a c sú reálne konštanty, $a \neq 0$. Definičný obor je $\mathbb{R}$.

Grafom kvadratickej funkcie je parabola, ktorej os je rovnobežná s osou y a má vrchol v bode

$$\left[-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right].$$

Vrchol paraboly je zároveň:

- minimum funkcie (tzn. parabola je otvorená smerom nahor), ak $a > 0$
- maximum funkcie (tzn. parabola je otvorená smerom nadol), ak $a < 0$.



Úlohy na precvičenie

1. Nájdite vrchol paraboly, zostrojte grafy kvadratických funkcií, ak je daná rovnica funkcie a zapíšte rovnicu osi paraboly.

a) $y = (x + 2)^2$

b) $y = (x - 4)^2 - 6$

c) $y = 0,5(x-4)^2 + 1$

d) $y = -(x + 1)^2 - 2$

e) $y = -x^2 - 3x + 6$

f) $y = x^2 + 7x - 14$

g) $y = -0,5x^2 + x + 1$

2. Určte chýbajúce hodnoty premennej x alebo funkčné hodnoty y tak, aby $[x, y] \in f$.

a) $y = x^2 - 3x$

$[x, -2]$

b) $y = x^2 + 5x - 1$

$[-2, y]$

c) $y = x^2 - x - 10$

$[x, 10]$

d) $y = 2x^2 + 5$

$[x, 9]$

3. Zistite, či usporiadaná dvojica patrí funkcii

a) $y = x^2 - 4x + 3$

$[-3, 6]$

$[-2, 15]$

b) $y = 2x^2 - 8x$

$[0, 0]$

$[2, -3]$

c) $y = 3 - 2x - x^2$

$[0, 3]$

$[1, -6]$

d) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$

$[0, -3]$

$[-4, -5]$

4. Nájdite súradnice vrcholu paraboly, zostrojte graf a na základe grafu určte vlastnosti kvadratickej funkcie a priesečníky so súradnicovými osami.

a) $y = x^2 - 3$

b) $y = 4 - x^2$

c) $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$

d) $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$

e) $y = x^2 + 10x + 20$

f) $y = x^2 - x$

g) $y = -x^2 - 3x$

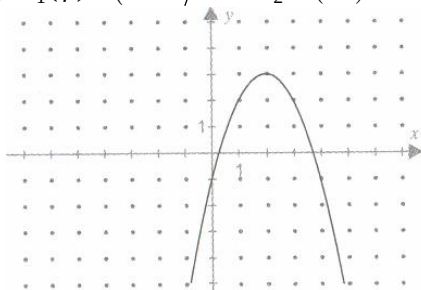
h) $y = 2x^2 + 12x + 15$

i) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 7x - 20$

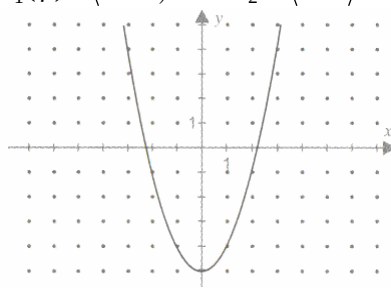
j) $y = -3x^2 + 18x - 25$

5. Na grafe kvadratickej funkcie vyznačte definičný obor funkcie a nájdite príslušný obor hodnôt funkcie, určte maximum a minimum, ak existuje.

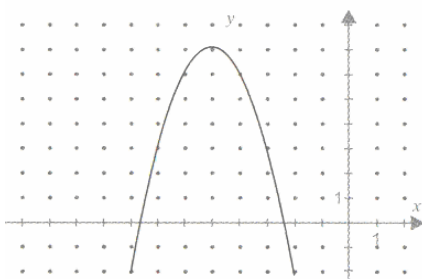
a) $D_1(f) = (-\infty, 4)$ $D_2(f) = (0, 2)$



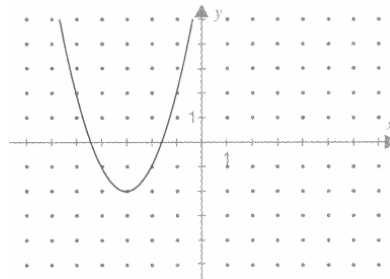
b) $D_1(f) = (-1, \infty)$ $D_2(f) = (-2, 1)$



c) $D_1(f) = (-6, -2)$ $D_2(f) = (-3, \infty)$



d) $D_1(f) = (-1, \infty)$ $D_2(f) = (-3, -1)$



6. Nájdite parametre a, b, c v rovnici kvadratickej funkcie, pre ktorú platí:

a) $f(0) = 2$ $f(1) = 3$ $f(2) = 6$

b) $f(1) = -3$ $f(4) = 21$ $f(2) = -3$

c) $f(-1) = 12$ $f(1) = 4$ $f(0) = 5$

7. Určte parametre p a q v rovnici $f: y = x^2 + px + q$, ak graf funkcie prechádza bodmi:

- a) $[0,2]$ $[2,4]$
- b) $[-3,15]$ $[-5,3]$
- c) $[4,7]$ $[-2,25]$
- d) $[-6,-7]$ $[-3,2]$

8. Vypočítajte súradnice priesečníkov grafu kvadratickej funkcie so súradnicovými osami:

- a) $y = 10x - 6x^2$
- b) $y = 3x^2 - x - 10$
- c) $y = -7x^2 + 6x - 10$
- d) $y = x^2 + 3x + 12$
- e) $y = \frac{1}{5}x^2 - 5x$
- f) $y = 9x^2 + 81$
- g) $y = 2(x - 3)^2 - 2$
- h) $y = -(x + 4)^2$

9. Nájdite rovnicu kvadratickej funkcie s danými vlastnosťami a zostrojte jej graf:

- a) Graf funkcie pretne os x v obrazoch čísel 3, -1, koeficient kvadratického člena je $a = 3$
- b) Graf funkcie pretne os y v obraze čísla -6, os x v obrazoch čísel -2 a -3.
- c) Graf funkcie pretne os x v obrazoch čísel -4 a 6, koeficient lineárneho člena je $b = -4$
- d) $f(1) = -13$, jej os má rovnicu $x + 3 = 0$, jej maximálna hodnota je -3
- e) Je párna, $[-2,2] \in f$, jej minimálna hodnota je -6.

10. zistite, pre ktoré hodnoty premennej nadobúda funkcia nezáporné hodnoty.

- a) $y = 0,5x^2 - 3x$
- b) $y = 8 - 0,5x^2$
- c) $y = -2x^2 + 8x - 6$
- d) $y = x^2 + 3x + 12$
- e) $y = 2x^2 - 17x + 8$
- f) $y = 9x^2 + 9$
- g) $y = (x + 2)^2 - 1$
- h) $y = -(x + 6)^2 + 9$

11. zistite, pre ktoré hodnoty premennej nadobúda funkcia záporné hodnoty.

- a) $y = 6 - x^2$
- b) $y = x^2 - 6x + 8$
- c) $y = -2x^2 + 12x - 10$
- d) $y = x^2 - 12x + 32$
- e) $y = 0,5x^2 + 5x + 8$
- f) $y = 3x - 2x^2$

12. Do jedného obrázka zostrojte grafy daných funkcií. Ako súvisí graf kvadratickej funkcie s koeficientmi v určitej rovnici.

- a) $f_1: y = x^2 - 2$
- $f_2: y = x^2 + 2$
- $f_3: y = (x - 2)^2$
- $f_4: y = (x + 2)^2$

13. Určte predpis funkcie, ktorej grafom je parabola s vrcholom $V[2; -3]$ prechádzajúca bodom $A[0;1]$. Parabolu načrtnite a určte jej nulové body.

12. Kvadratické rovnice a nerovnice

Kvadratickou rovnicou s neznámou x nazýváme každú rovnicu tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, kde a, b, c sú reálne čísla a x je premenná, pričom $a \neq 0$.

Členy kvadratického trojčlena $ax^2 + bx + c$ nazývame: ax^2 – **kvadratický člen**, bx – **lineárny člen**, c – **absolútny člen kvadratickej rovnice**.

Špeciálne prípady kvadratickej rovnice:

ak $b = 0$, tak kvadratická rovnica má tvar $ax^2 + c = 0$ a nazýva sa **rýdzokvadratická rovnica**;

ak $c = 0$, tak kvadratická rovnica má tvar $ax^2 + bx = 0$ a nazýva sa **kvadratická rovnica bez absolútneho člena**;

ak upravíme kvadratickú rovnicu $ax^2 + bx + c = 0$ na tvar $x^2 + px + q = 0$, kde $p = b/a$ a $q = c/a$, tak hovoríme o **normovanom tvare kvadratickej rovnice**.

Riešiť kvadratickú rovnicu $ax^2 + bx + c = 0$ možno pomocou výrazu:

$$D = b^2 - 4ac,$$

ktorý nazývame **diskriminant**.

Platí:

- ak $D > 0$, tak daná kvadratická rovnica má 2 rôzne reálne korene
- ak $D = 0$, tak daná kvadratická rovnica má dva rovnaké reálne korene, čiže tzv. dvojnásobný reálny koreň
- ak $D < 0$, tak daná kvadratická rovnica nemá riešenie v obore reálnych čísel (v obore komplexných čísel má dva imaginárne komplexne združené korene)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm D}{2a} \quad \text{resp.} \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Úlohy na precvičenie

1. Riešte v R rovnice:

a) $(x-2)^2 + (x-9)^2 = (x-11)^2$

b) $\frac{x+1}{x+3} - \frac{x-1}{x+5} = \frac{x(x-1)+12}{x(x+8)+15}$

2. Riešte v R rovnicu

a) $5x^2 + 10x - 36 = -3 \cdot (x+2)^2 + 24x - 23$

b) $\frac{x^2-17}{x^2-1} = \frac{x-2}{x+1} - \frac{5}{1-x}$

3. Riešte v Z rovnicu:

$$\frac{\frac{5x}{6} - \frac{1}{3}}{\frac{x}{2} + \frac{1}{6}} = \frac{\frac{x}{5} + \frac{2}{5}}{\frac{4x}{15} - \frac{1}{3}}$$

4. Vhodnou substitúciou riešte rovnicu:

a) $(x^2-9)^2 - 8(x^2-9) + 7 = 0$

b) $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - 3\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 4 = 0$

5. Riešte v R: a) $3x^2 - 7x + 4 \leq 0$

b) $2x^2 - 7x - 15 \geq 0$

6. V množine reálnych čísel vyriešte: $\frac{1+3x}{x-2} \geq 0$

7. Riešte v R:

a) $x^2 + 4|x| - 12 = 0$

b) $x^2 - 6|x| - 91 = 0$

c) $|x^2 + 3x| - 4 = 0$

d) $|x^2 - 2x + 2| = 5$

8. V rovnici $3x^2 + 10x + c = 0$ je jeden koreň -4 . Určte parameter c druhý koreň.

9. S využitím grafov kvadratickej funkcie riešte nasledujúce nerovnice:

a) $x^2 - 9x + 14 \geq 0$

b) $-x^2 - 2x + 8 > 0$

c) $x^2 + 4x + 9 \leq 0$

d) $x^2 - 6x + 7 < 0$

10. Riešte nerovnice: a) $x(x-2) \leq 2x-4$

b) $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} + \frac{7}{3} < \frac{(x-3)^2}{6} + 3x$

11. Obvod obdĺžnika má 82 m, dĺžka jeho uhlopriečky je 29 m. Určte rozmery obdĺžnika.

12. Obvod pravouhlého trojuholníka má 84 cm, prepona 37 cm. Vypočítajte dĺžky odvesien.

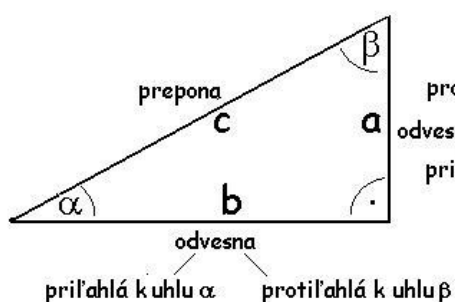
13. Na obdĺžnikovej ploche s rozmermi 12 m a 10 m chceme mať taký obdĺžnikový kvetinový záhon s rozlohou 8 m², aby jeho okraje boli rovnako vzdialené od okrajov plochy.

13. Goniometrické funkcie

Funkcie sínus a kosínus sa pôvodne definovali pomocou **pravouhlého** trojuholníka s uhlom x ($x \neq 90^\circ$) takto:

- $\sin x$ je pomer protiľahlej odvesny tohto uhla a prepony,
- $\cos x$ je pomer priľahlej odvesny k tomuto uhlu a prepony
- $\operatorname{tg} x$ je pomer $\sin x$ a $\cos x$
- $\operatorname{cotg} x$ je prevrátená hodnota $\operatorname{tg} x$.

Goniometrické funkcie v pravouhlom trojuholníku



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{cotg} \beta = \frac{a}{b}$$

Funkcia sínus

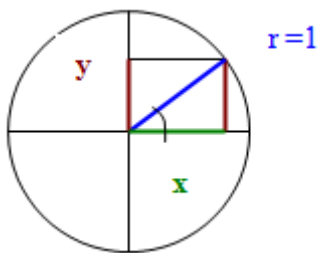
Definícia: Funkcia **sínus** sa nazýva funkcia, ktorá na množine $\mathbb{R}$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$ priradzuje y_M .

Píšeme: $y = \sin x$.

Pozn:

Pri použití jednotkovej kružnice funkciu sínus určujeme na osi y . Môžeme to odôvodniť aj definíciou funkcie sínus z pravouhlého trojuholníka:

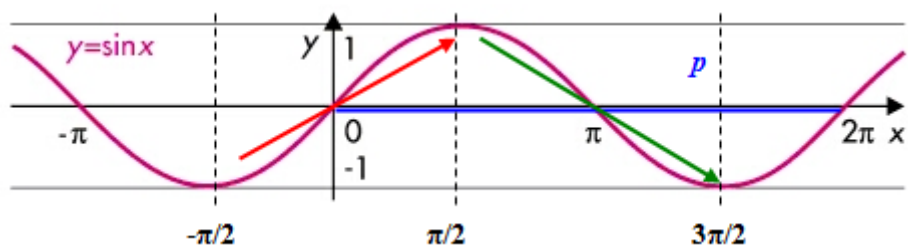
$$\sin \alpha = \text{protiľahlá odvesna} / \text{prepona} = y / 1 = y$$



Grafom funkcie sínus je **sínusoida**.

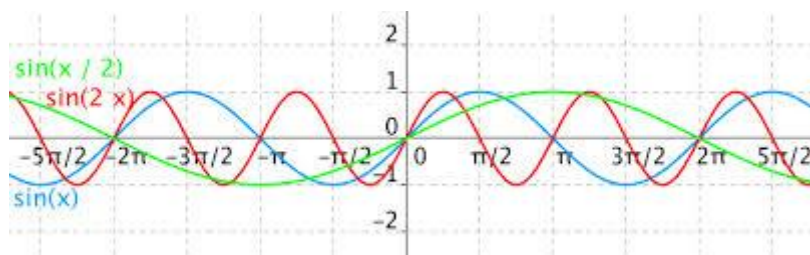
(Jednotková kružnica je kružnica, ktorej polomer je 1 jednotka, jej dĺžka je 2π .

1 radián je uhol, ktorý na jednotkovej kružnici s vrcholom v strede kružnice vytína oblúk dĺžky 1, platí $1 \text{ rad} = 57^\circ 17'$, čo je jednotka oblúčovej miery).



Vlastnosti funkcie $y = \sin x$:

1. $D(f) = \mathbb{R}$
2. $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$
3. **monotónnosť**: rastúca $\langle -\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi \rangle$
klesajúca $\langle \pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi \rangle, k \in \mathbb{Z}$
4. **párnosť - nepárnosť**: funkcia je **nepárna** $\sin(-x) = -\sin x$, (graf je súmerný podľa počiatku)
5. **ohraničenosť**: funkcia je ohraničená na **celom** $D(f)$ hodnotami **-1, 1**
6. **extrémy**: **minimum** má funkcia v bode $-\pi/2 + 2k\pi$
maximum má funkcia v bode $\pi/2 + 2k\pi$
7. **Spojitosť**: **spojitá v $\mathbb{R}$**
8. **Periodickosť**: funkcia je **periodická** s základnou periódou **$p = 2\pi$** , platí $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$



Funkcia kosínus

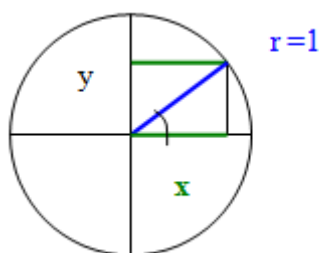
Definícia: Funkcia kosínus sa nazýva funkcia, ktorá na množine $\mathbb{R}$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$ priradzuje x_M .

Píšeme: $y = \cos x$, $\cos x : x \in x_M$

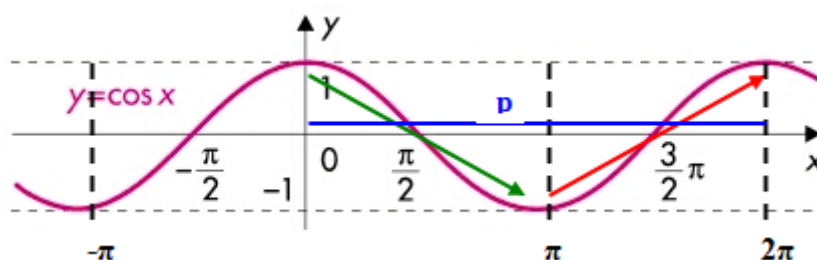
Pozn:

Pri použití jednotkovej kružnice funkciu kosínus určujeme na osi x . Môžeme to odôvodniť aj definíciou funkcie kosínus z pravouhlého trojuholníka:

$\cos \alpha = \text{priľahlá odvesna} / \text{prepona} = x / 1 = x$



Grafom funkcie kosínus je **kosínusoida**.



Vlastnosti funkcie $y = \cos x$:

1. $D(f) = \mathbb{R}$
2. $H(f) = \langle -1, 1 \rangle$
3. **monotónnosť**: rastúca $\langle \pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi \rangle$
klesajúca $\langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle, k \in \mathbb{Z}$
4. **párnosť-nepárnosť**: funkcia je **párna** $\cos(-x) = \cos x$, (graf je súmerný podľa osi y)
5. **ohraničenosť**: funkcia je ohraničená na **celom** $D(f)$ hodnotami **-1, 1**
6. **extrémy**: **minimum** má funkcia v bode $\pi + 2k\pi$
maximum má funkcia v bode $2k\pi$
7. **Spojitosť**: **spojitá** v $\mathbb{R}$
8. **Periodickosť**: funkcia je **periodická** s základnou periódou **p = 2π**, platí
 $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$

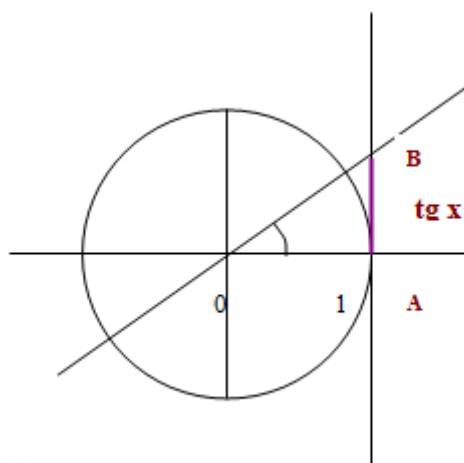
Funkcia tangens

Definícia: Funkcia **tangens** sa nazýva funkcia daná rovnicou $y = \sin x / \cos x$, x je rôzne od $\pi/2 + 2k\pi$.

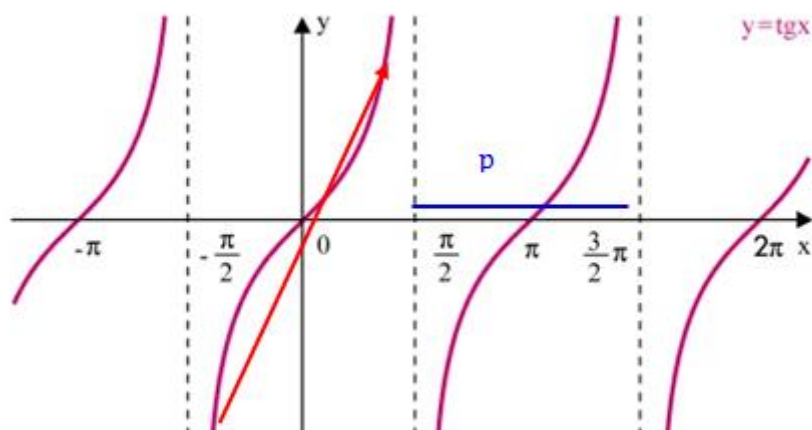
Píšeme: $y = \tan x$

Pozn:

Pri použití jednotkovej kružnice funkciu tangens určujeme na priamke rovnobežnej s osou y a prechádzajúcou 1 alebo -1 na osi x. Podľa definície z jednotkovej kružnice je funkcia tangens daná: $\tan \alpha = |AB| / 1 = |AB|$



Grafom funkcie kosínus je **tangentoida**.



Vlastnosti funkcie $y = \operatorname{tg} x$:

1. $D(f) = \mathbb{R} - \{(2k+1)\pi/2\}; k \in \mathbb{Z}$
2. $H(f) = \mathbb{R}$
3. **monotónnosť**: rastúca na intervaloch $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$
4. **párnosť** - **nepárnosť**: funkcia je **nepárna** $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ (graf je súmerný podľa počiatku)
5. **ohraničenosť**: funkcia nie je ohraničená na celom $D(f)$
6. **extrémy**: na $D(f)$ **neexistujú**
7. **Spojitosť**: **nie je definovaná** pre $(2k+1)\pi/2$
8. **Periodickosť**: funkcia je **periodická** s základnou periódou $p = \pi$, platí
 $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k\pi)$

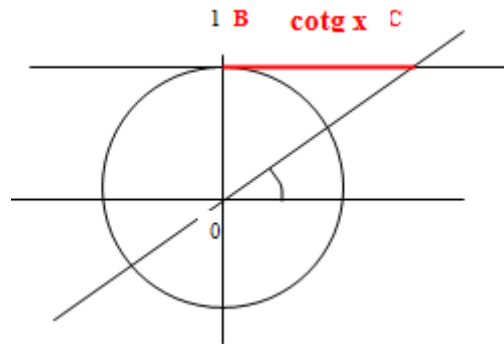
Funkcia kotangens

Definícia: Funkcia kotangens sa nazýva funkcia daná rovnicou $y = \cos x / \sin x$, x je rôzne od $k\pi$.

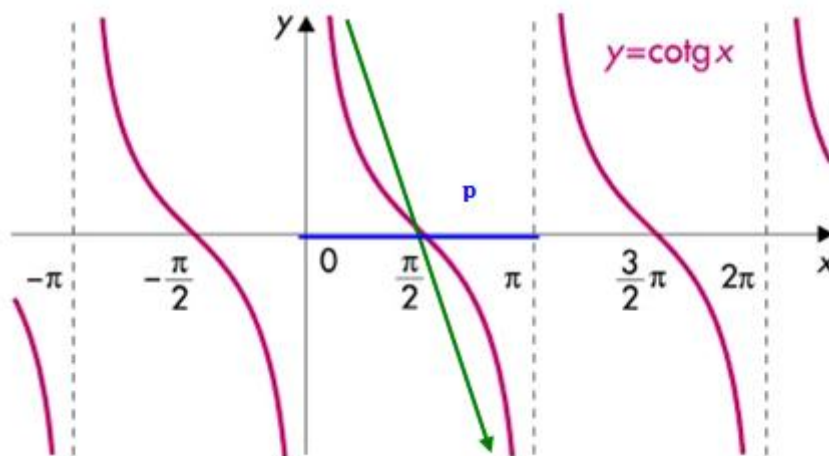
Píšeme: $y = \operatorname{cotg} x$

Pozn:

Pri použití jednotkovej kružnice funkciu kotangens určujeme na priamke rovnobežnej s osou x a prechádzajúcou 1 alebo -1 na osi y . Podľa definície z jednotkovej kružnice je funkcia tangens daná $\cotg \alpha = |BC| / 1 = |BC|$.



Grafom funkcie kosínus je **kotangentoida**.



Vlastnosti funkcie $y = \cotg x$:

1. $D(f) = \mathbb{R} - \{k\pi\}; k \in \mathbb{Z}$
2. $H(f) = \mathbb{R}$
3. **monotónnosť:** klesajúca na intervaloch $(k\pi, \pi + k\pi)$
4. **párnosť - nepárnosť:** funkcia je **nepárna** $\cotg(-x) = -\cotg x$, (graf je súmerný podľa počiatku)
5. **ohraničenosť:** funkcia nie je ohraničená na celom $D(f)$
6. **extrémy:** na $D(f)$ **neexistujú**
7. **Spojitosť:** nie je definovaná pre $k\pi$
8. **Periodickosť:** funkcia je **periodická** s základnou periódou $p = \pi$, platí $\cotg x = \cotg(x + k\pi)$.

Platí:

Tabuľka význačných hodnôt goniometrických funkcií pre $x \in (0; 2\pi)$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	*	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	*	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{cotg} x$	*	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	*	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	*

* znamená, že funkcia nie je pre danú hodnotu definovaná

Pre všetky prípustné hodnoty $x \in \mathbf{R}$ platia

VZŤAHY MEDZI GONIOMETRICKÝMI FUNKCIAMI S ROVNAKÝM ARGUMENTOM:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$	$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$
---------------------------	---	---	---

Úlohy na precvičenie

1. Dokážte, že platí:

- a) $\sin 20^\circ = \sin 740^\circ$
c) $\sin 80^\circ = \sin(-1000^\circ)$
e) $\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg}(-105^\circ)$

- b) $\cos 54^\circ = \cos(-1026^\circ)$
d) $\cos(-1750^\circ) = \cos 50^\circ$
f) $\operatorname{cotg}(-541^\circ) = \operatorname{cotg} 359^\circ$

2. Daná je množina $M = \left\{ 2; -0,45; \sqrt{4,1}; 0,8; -0,56; -5,6; 1,09; \sqrt{3}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$. Ktorý z jej prvkov môže byť hodnotou funkcie?

- a) $y = \sin x$ b) $y = \cos x$ c) $y = \operatorname{tg} x$ d) $y = \operatorname{cotg} x$

3. Do ktorého z intervalov $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle, \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle, \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2} \right\rangle, \left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$ patrí x , pre ktoré platí:

- a) $\sin x = 0,8$ a zároveň $\cos x < 0$;
c) $\operatorname{tg} x > 0$ a zároveň $\sin x > 0$;
e) $\sin x < 0$ a zároveň $\operatorname{cotg} x < 0$;
b) $\sin x \leq 0$ a zároveň $\cos x = -0,3$;
d) $\operatorname{cotg} x < 0$ a zároveň $\cos x > 0$;
f) $\operatorname{tg} x < 0$ a zároveň $\cos x < 0$.

4. Rozhodnite o pravdivosti nasledovných výrokov:

- a) $\sin \frac{3}{4}\pi < \sin \frac{5}{4}\pi$ b) $\sin \frac{13}{7}\pi < 0$
c) $\cos\left(-\frac{16}{3}\pi\right) > 0$ d) $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) > \cos \frac{\pi}{9}$
e) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} > \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$ f) $\sin \frac{\pi}{3} < \sin \frac{\pi}{6}$

5. Vypočítajte:

- a) $\cot g \frac{12}{8}\pi \cdot \operatorname{tg} 11\pi \cdot \cot g \frac{19}{3}\pi \cdot \operatorname{tg}(-7\pi)$ b) $\frac{\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cot g\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) \cdot \cos(-4\pi)}$

6. Usporiadajte podľa veľkosti čísla:

- a) $\sin 60^\circ, \cos 60^\circ, \operatorname{tg} 60^\circ, \operatorname{cotg} 60^\circ$
b) $\operatorname{tg} \frac{10}{3}\pi, \cot g\left(-\frac{2}{3}\pi\right), \sin(-3\pi), \cos 2\pi$

7. V intervale $\langle -\pi, 3\pi \rangle$ načrtnite grafy funkcií:

- a) $y = -\cos x$ b) $y = 3 \cdot \sin x$ c) $y = \sin 2x$
d) $y = 2 - \cos x$ e) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ f) $y = |\sin x|$
g) $y = \sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right)$ h) $y = \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$ i) $y = 2 \cdot \cos\left(0,5x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$

8. Vypočítajte hodnoty ostatných goniometrických funkcií, ak:

a) $\cos x = 0,6$; $x \in \left(\frac{1}{2}\pi, \pi\right)$;

b) $\sin x = \frac{12}{13}$; $x \in \left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$;

c) $\cotg x = -\frac{3}{4}$; $x \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$;

d) $\tg x = \frac{4}{3}$; $x \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$.

14. Goniometrické rovnice, nerovnice

Goniometrické rovnice sú rovnice, ktoré okrem konštánt obsahujú neznámu x alebo výrazy s neznámu x ako argumentmi niektorej z goniometrických funkcií; $f(\sin x, \cos c, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x) = 0$

Základnou goniometrickou rovnicou s neznámu x je rovnica v tvare $f(x) = c$, kde f je goniometrická rovnica, c je reálne číslo.

Možnosti riešenia:

1. numericky (najčastejšie)
2. graficky

Rozlišujeme **rôzne typy** goniometrických rovníc:

1. Základné goniometrické rovnice v tvare $F(x) = d$
2. Goniometrické rovnice riešené substitúciou prechodom na základnú rovnicu (lineárnu rovnicu).
3. Goniometrické rovnice riešené substitúciou prechodom na kvadratickú rovnicu
4. Iné typy rovníc

1. **Základné goniometrické rovnice v tvare $F(x) = d$**

$$f(x) = c$$

Riešte: $\sin x = -\frac{1}{2}$

$$x_0 = \pi/6$$

mínusová hodnota mi hovorí, že výsledný uhol bude v III. A IV. Kvadrante

III. kvadrant: $x_1 = \pi + \pi/6 = 7\pi/6 + 2k\pi$

IV. kvadrant: $x_2 = 2\pi - \pi/6 = 11\pi/6 + 2k\pi$

$K = \{7\pi/6 + 2k\pi, 11\pi/6 + 2k\pi\}$

2. **Goniometrické rovnice riešené substitúciou prechodom na základnú rovnicu (lineárnu rovnicu).**

$$f(x+d) = c$$

Riešte: $\sin(x+30^\circ) = \sqrt{2}/2$

Použijeme substitúciu a výraz v zátvorke nahradíme inou neznámou.

Subst: $x+30^\circ = y$

$$\sin y = \sqrt{2}/2$$

$$y_0 = 45^\circ$$

Kladná hodnota nám určuje že výsledok bude v I. a II. Kvadrante.

I. kvadrant:

$$y_1 = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$x_1 + 30^\circ = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$x_1 = 15^\circ + k \cdot 360^\circ$$

II. kvadrant

$$y_2 = 135^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$x_2 + 30^\circ = 135^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$x_2 = 105^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\mathbf{K = \{15^\circ + k \cdot 360^\circ, 105^\circ + k \cdot 360^\circ\}}$$

3. Goniometrické rovnice riešené substitúciou prechodom na kvadratickú rovnicu

- pri tomto type rovníc prevediem zložitejšiu goniometrickú rovnicu na kvadratickú rovnicu.
- po vyriešení kvadratickej rovnice dostaneme čiastkové výsledky pre neznámu y , následne sa vrátíme do substitúcie a vypočítame hodnotu neznámej x .

1. obsahujúce jednu goniometrickú funkciu

Riešte: $2 \cos^2 x + 7 \cos x + 3 = 0$

Subst.

$$\cos x = y$$

$$2y^2 + 7y + 3 = 0 - \text{riešime klasickú kvadratickú rovnicu}$$

$$D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25$$

$$y_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D}) / 2a = (-7 \pm \sqrt{25}) / 2 \cdot 2$$

$$y_1 = -3$$

$$y_2 = -1/2$$

$\cos x = -3$ - nie je definované

$$\cos x = -1/2$$

$$x_0 = 60^\circ$$

Mínus nám indikuje druhý a tretí kvadrant.

II. kvadrant: $x_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ + k \cdot 360^\circ$

III. Kvadrant. $x_2 = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ + k \cdot 360^\circ$

$K = \{120^\circ + k \cdot 360^\circ, 240^\circ + k \cdot 360^\circ\}$

4. obsahujúca viac goniometrických funkcií

Pozn: Pri počítaní takejto rovnice sa snažíme rovnicu upraviť tak, aby sme dostali rovnicu iba s jednou funkciou.

Riešte: $2\sin^2 x - \cos^2 x - 4 \sin x + 2 = 0$

Snažíme sa úpravami (pomocou goniometrických vzorcov) dostať v rovnici iba jednu funkciu. V tomto prípade môžeme využiť vzťah $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ($\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$)

$$2\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) - 4 \sin x + 2 = 0$$

$$3\sin^2 x - 4 \sin x + 1 = 0$$

Subst: $\sin x = y$

$$3y^2 - 4y + 1 = 0$$

$$y_1 = 1 \quad y_2 = 1/3$$

$$\sin x = 1$$

$$x_1 = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\sin x = 1/3$$

kladné znamienko indikuje I. a II. kvadrant

I. kvadrant: $x_2 = 19^\circ 28' + k \cdot 360^\circ$

II. kvadrant: $x_3 = 160^\circ 32' + k \cdot 360^\circ$

$K = \{90^\circ + k \cdot 360^\circ, 19^\circ 28' + k \cdot 360^\circ, 160^\circ 32' + k \cdot 360^\circ\}$

5. Iné typy rovníc- napr. goniometrické rovnice v súčinovom a podielovom tvare získané úpravami

Riešte: $\sin 2x = \cos 3x \cdot \sin 2x$

$$\sin 2x - \cos 3x \cdot \sin 2x = 0$$

- rovnicu nemožno deliť výrazom $\sin 2x$, pretože by sa zúžil obor pravdivosti o koreň x_1 .

$$\sin 2x \cdot (1 - \cos 3x) = 0$$

- daná rovnica sa bude rovnať nule, ak prvá alebo druhá časť sa bude rovnať nule.

$$\sin 2x = 0 \quad \wedge \quad 1 - \cos 3x = 0$$

$$\text{subst: } 2x = y \quad 3x = z$$

$$\sin y = 0 \quad 1 - \cos z = 0$$

$$\cos z = 1$$

$$y = k\pi \quad z = 2k\pi$$

$$2x = k\pi \quad 3x = 2k\pi$$

$$x_1 = k\pi / 2 \quad x_2 = 2k\pi / 3$$

$$\mathbf{K = \{ k\pi / 2, 2k\pi / 3 \}}$$

Goniometrické nerovnice nazývame nerovnice, ktoré okrem konštánt obsahujú neznámu x alebo výrazy s neznámou x , ako argumenty jednej alebo niekoľkých goniometrických funkcií.

Pri riešení nerovníc postupujeme ako pri riešení goniometrických rovníc. Výsledkom je nejaký interval alebo skupina intervalov, ktoré zjednotíme. Postupujeme buď numericky alebo graficky. Na grafické riešenie goniometrických nerovníc používame jednotkovú kružnicu alebo graf danej funkcie.

Riešte: $\sin x \geq 1/2$

Transformujeme nerovnicu na rovnicu $\sin x = 1/2$. Jej korene sú $x_1 = \pi/6$ a $x_2 = 5\pi/6$. Vyznačíme ich na jednotkovej kružnici.

Na jednotkovej kružnici hľadáme hodnoty funkcie sínus, ktoré sú väčšie alebo rovné ako $1/2$.

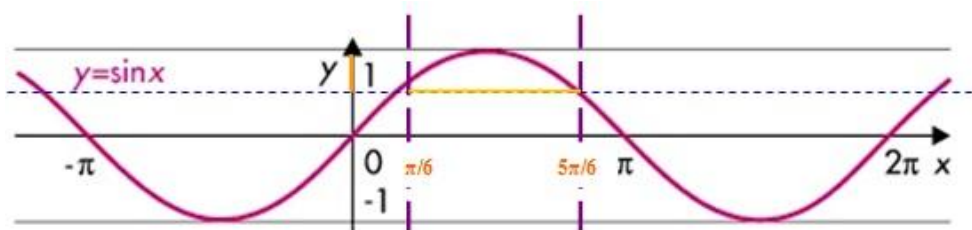
Riešením nerovnice sú hodnoty z intervalu $\langle \pi/6, 5\pi/6 \rangle$. Hodnoty sa opakujú s periódou $2k\pi$, preto riešením danej nerovnice je interval $\langle \pi/6 + 2k\pi, 5\pi/6 + 2k\pi \rangle$

Tento príklad môžeme riešiť i graficky pomocou grafu goniometrickej funkcie sínus.

- na osi y vyznačíme $1/2$.

- keďže podľa zadania hodnoty majú väčšie alebo rovné ako $1/2$, potom nás zaujíma tá časť grafu, ktorá sa nachádza nad úrovňou $1/2$, teda to sú intervaly od $\pi/6$ po $5\pi/6$, opakujúce sa s periódou $2k\pi$

- riešením tejto nerovnice je $\langle \pi/6 + 2k\pi, 5\pi/6 + 2k\pi \rangle$



Platí:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot gx = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \cot gx = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\cot g 2x = \frac{\cot g^2 x - 1}{2 \cot gx}$$

Úlohy na precvičenie

1. Riešte v $\mathbb{R}$ rovnicu:

a) $\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x = -3$

b) $2 \sin \frac{x}{3} = \sqrt{3}$

c) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$

d) $\sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

e) $\operatorname{tg} \left(\frac{3}{4}x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

f) $\sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

g) $\cos \left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 0,5$

h) $\operatorname{cotg} \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$

i) $\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

2. Riešte v $\mathbb{R}$:

a) $2 \cdot \sqrt{3} \operatorname{cotg} \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -2$

b) $\frac{5 + \sin x}{1 - \sin x} = 3$

c) $\operatorname{cotg}^2 x = \sqrt{3} \operatorname{cotg} x$

d) $3 \cdot \operatorname{tg}^2 x = 1$

e) $4 \cdot \cos^2 x - 4 \cdot \cos x - 3 = 0$

f) $\sin x + \frac{1}{\sin x} = 2$

3. Riešte v $\mathbb{R}$:

a) $\sin 2x + \cos x = 0$

b) $\sin x - \cos 2x = 0$

c) $3 \cdot \sin^2 x = \cos^2 x$

d) $\operatorname{tg} x - 3 \operatorname{cotg} x = 0$

4. Riešte v intervale $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$:

a) $2 \cdot \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

b) $2 \cdot \sin^2 x + 3 \cdot \cos x = 0$

c) $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 2$

d) $\operatorname{tg}^2 x + 3 \cdot \operatorname{cotg}^2 x = 4$

5. Použitím jednotkovej kružnice určte všetky $x \in \mathbb{R}$, ktoré vyhovujú nerovnici:

a) $\sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\operatorname{tg} x \geq 1$

d) $\operatorname{cotg} x < \sqrt{3}$

15. Kombinatorika

Permutácie

Permutácia n prvkov je každá usporiadaná n –tica vytvorená z týchto prvkov. Každý z n prvkov sa v tejto n-tici vyskytuje práve raz. Jednotlivé permutácie sa od seba líšia len poradím prvkov.

$$P(n) = n!$$

Permutácie s opakovaním

$$P^*(n)_{n_1, n_2, n_3, \dots, n_p} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_p!}$$

n_1 – počet rovnakých prvkov 1. druhu

n_2 - počet rovnakých prvkov 2. druhu

n_3 - počet rovnakých prvkov 3. druhu

n_j - počet rovnakých prvkov j-tého druhu

Platí : $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_j = n$

Variácie

Variácia k-tej triedy z n prvkov je každá usporiadaná k-tica rôznych prvkov, vybraných z n-prvkovej množiny. V k-tici záleží na poradí prvkov. V k-tici sa ani jeden z prvkov neopakuje.

Počet variácií:

$$V(k, n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Variácie s opakovaním

Variácia k-tej triedy z n prvkov s opakovaním je každá usporiadaná k-tica prvkov vybraných z n-prvkovej množiny. V k-tici sa môžu prvky ľubovoľne opakovať.

Počet variácií s opakovaním: $V^*(k, n) = n^k$

Kombinácie k-tej triedy z n prvkov (bez opakovania)

Kombinácie k-tej triedy z n prvkov (bez opakovania) je každá k-tica rôznych prvkov vybraných z n prvkovej množiny (v k-tici nezáleží na poradí prvkov).

$$C(k, n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

Kombinácie k-tej triedy z n prvkov (s opakovaním)

Kombinácie k-tej triedy z n prvkov (s opakovaním) je každá k-tica prvkov vybraných z n-prvkovej množiny (v k-tici nezáleží na poradí prvkov a môžu sa v nej prvky ľubovoľne opakovať).

$$C^*(k, n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Faktoriál a kombinačné číslo

a) Ak $n \in \mathbb{N}$: $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots\dots\dots 3.2.1$, $0! = 1$

$$n! = n(n-1)!$$

$$Ak: n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}_0^+, k \leq n$$

$$b) \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$\binom{n}{0} = 1, \binom{0}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Binomická veta

Pre ľubovoľné a, b $\in \mathbb{R}$, n $\in \mathbb{N}$ platí:

$$(A+B)^n = \binom{n}{0}A^n + \binom{n}{1}A^{n-1}B + \binom{n}{2}A^{n-2}B^2 + \dots\dots\dots + \binom{n}{n-1}AB^{n-1} + \binom{n}{n}B^n$$

$$M_k = (-1)^{k+1} \binom{n}{k-1} A^{n-k+1} B^{k-1}, k \in \mathbb{N}$$

Pascalov trojuholník

n = 0	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	1
n = 1	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	1 1
n = 2	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	1 2 1
n = 3	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$	1 3 3 1
n = 4	$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$	1 4 6 4 1

Platí:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Úlohy na precvičenie

1. Koľko rôznych 5 ciferných čísel je možné vytvoriť z číslíc 1, 2, 3, 4, 5, aby sa každá opakovala iba raz?
2. Koľko rôznych 2 ciferných čísel je možné vytvoriť z číslíc 1, 2, 3, 4, 5, tak, aby sa každá opakovala iba raz?
3. Koľkými spôsobmi je možné vytvoriť trojzvuk zo siedmich tónov?
4. Koľkými spôsobmi je možné odmeniť prvou, druhou a tretou cenou trinásť účastníkov súťaže?
5. Na lavičke sedí 6 dievčat.
 - a) Koľkými spôsobmi sa môžu presadiť?
 - b) Koľkokrát sa môžu presadiť ak dve chcú vždy sedieť vedľa seba?
6. Koľkými spôsobmi si môže zhromaždenie 30 ľudí zvoliť svojho predsedu, podpredsedu a pokladníka?
7. Koľko trikolór možno zostaviť z farieb : biela, modrá, červená a zelená?. Každá farba sa môže vyskytovať iba raz.
8. V škole je desať rôznych predmetov. Denne sa vyučuje 5 rôznych predmetov. Koľkými spôsobmi je možné zostaviť rozvrh hodín?
9. Koľko rôznych 5 ciferných čísel je možné vytvoriť z číslíc 1, 2, 3, 4, 5, 6 (čísllice sa v číslach nebudú opakovať) tak, aby:
 - a) Všetky začínali jednotkou a končili šiestkou.
 - b) 1, 2, 3, boli vždy vedľa seba, ale v ľubovoľnom poradí.
 - c) Aby boli deliteľné 2.
10. Koľko päťprvkových podmnožín je možné vytvoriť z množiny všetkých cifier?
 - a) Koľko z nich obsahuje cifru 7?
 - b) Koľko z nich neobsahuje cifru 3?
 - c) Koľko z nich neobsahuje ani 3 ani 7?
11. Koľko číslíc väčších ako 32 je možné vytvoriť z číslíc 0, 1, 2, 3, 5, 8, za predpokladu, že sa žiadna z číslíc neopakuje? Koľko z nich je nepárnych?
12. Tréner futbalového mužstva má k dispozícii 3 brankárov, 5 obrancov, 8 záložníkov a 10 útočníkov. Koľko rôznych jedenástiek z nich môže zostaviť, ak vyberá 1 brankára, 2 obrancov, 4 záložníkov a 4 útočníkov?
13. Zjednodušte:

$$a) \frac{(n+6)!}{(n+4)!} - \frac{n!}{(n-2)!}$$

$$b) \frac{1}{n!} - \frac{3}{(n+1)!} - \frac{n^2-4}{(n+2)!}$$

14. Riešte rovnicu v N:

$$\binom{x}{2} + \binom{x-1}{2} = 4$$

16. Teória pravdepodobnosti

- zaoberá sa určovaním pravdepodobnosti náhodných udalostí
- ak má nejaký pokus n rovnako pravdepodobných možných výsledkov a pre k z nich nastane udalosť A , tak hovoríme, že pravdepodobnosť udalosti A je

$$A = \frac{k}{n}$$

- **isté** udalosti → také čo nastanú vždy (napr. každé ráno vyjde slnko)
- **náhodné** udalosti → také udalosti, o ktorých s menšou/väčšou istotou môžeme predpokladať že sa stanú (napr. v piatok pôjdem k dedkovi)
- **nemožné udalosti** → také, o ktorých vieme že nemôžu nastať (napr. 14 ročné dieťa nedostane vodičský preukaz)
- **relatívna početnosť danej udalosti**: podiel početnosti určitej udalosti a celkového počtu náhodných pokusov (napr. 20x hodím kockou – urč relatívnu početnosť udalosti „padla trojka“!)

Úlohy na precvičenie

1. Z osemnástich lístkov očíslovaných 1 - 18 vytiahneme náhodne jeden lístok. Aká je pravdepodobnosť, že na vytiahnutom lístku bude:

- a) párne číslo
- b) číslo deliteľné 3
- c) prvočíslo
- d) deliteľné 6

2. Aká je pravdepodobnosť že pri hode dvoma kockami (červenej a modrej) padne:

- a) súčet 8
- b) súčet, ktorý je deliteľný piatimi
- c) súčet, ktorý bude párny

3. Dlhodobé výskumy na istom území ukázali, že zo 100 000 detí sa 82 170 dožije 40 rokov a 37 930 sa dožije 70 rokov. Aká je pravdepodobnosť, že človek, ktorý sa dožije 40 rokov, dožije sa aj 70 rokov?

4. V meste sú štyri križovatky so svetelnými semaforami. Každý z nich uvoľňuje alebo uzatvára dopravu s rovnakou pravdepodobnosťou 0,5. Aká je pravdepodobnosť, že auto:

- a) prejde prvou križovatkou bez zdržania
- b) prejde prvými dvomi križovatkami bez zdržania
- c) prejde všetkými štyrmi križovatkami bez zdržania.

5. V 32 hracích kartách sú 4 esá a 12 figúr (4 králi, 4 horníci a 4 dolníci). Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vytiahnutá jedna karta bude eso alebo figúra?

6. V šesnástich fľašiach sú minerálky. Vieme, že v 10 fľašiach je Slatina a v 6 fľašiach je Baldovská. Aká je pravdepodobnosť, že medzi 4 náhodne vybratými fľašami sú 2 Slatiny a 2 Baldovské?

17. Základy štatistiky

Štatistický súbor – súbor ktorý je predmetom štatistického zisťovania, čo je určenie pozorovaných skutočností, (javov, udalostí), z hľadiska napr. druhu či číselnej veľkosti a pod.

Rozsah súboru - počet prvkov súboru

Štatistické jednotky – jednotlivé prvky štatistického súboru.

Štatistický znak – spoločná vlastnosť prvkov súboru (jej premennosť skúmame). Hodnoty znaku môžu byť **kvantitatívne** (vyjadrené sú číslom – napr. výška 120 cm) alebo **kvalitatívne** (slovné vyjadrenie – napr. farba vlasov – čierna). Početnosť znaku môže byť **absolútna** a **relatívna** (z 20 hodov kockou padla šestka 3x → absolútna početnosť: 3; relatívna početnosť: 3/20).

Ak štatistický súbor rozdelíme do menších, rovnorodých častí - tried, hovoríme o **štatistickom triedení**.

Štatistická tabuľka - je tabuľka, do ktorej zapisujeme zistené údaje pri štatistickom skúmaní.

Medián – prostredná hodnota; (hodnota znaku prostredného prvku súboru, ak sú tieto prvky usporiadané podľa veľkosti)

Modus – najčastejšie sa vyskytujúca hodnota v štatistickom súbore.

Aritmetický priemer – je súčet všetkých hodnôt vydelený ich počtom. Zisťujeme ním priemernú hodnotu.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Geometrický priemer - na rozdiel od aritmetického priemeru používa na koeficienty, napr. pri výpočte priemerného rastu:

$$\bar{x}_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Vyššie uvedené charakteristiky nazývame charakteristiky polohy.

Charakteristiky variability

a) Variačné rozpätie $R = x_{\max} - x_{\min}$

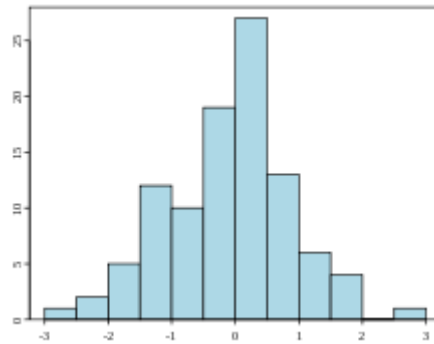
b) Rozptyl (disperzia)

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

c) Smerodajná odchýlka

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Na ilustráciu výsledkov používame okrem tabuliek i rôzne grafy – napr. **histogram** – stĺpcový diagram, ktorý znázorňuje rozloženie početností. Grafické znázornenie nám umožní rýchlejšie a ľahšie pochopenie súvislostí.



Úlohy na precvičenie

1. Dvojčky Karolínka a Jakub si zaznačili do tabuľky svoje školské známky, ktoré dostali počas celého polroka z určitých predmetov :

	matematika	fyzika	chémia	zemepis
Karolínka	1,2,3,1,1,5,2	3,3,1,1,1,2	1,1,1,3,4,1	2,2,3,1,5,4
Jakub	4,4,1,2,2	2,2,2,2	5,5,4,4,3,4,3,3	1,1,2,1,1,1,2,1

Vypočítajte výslednú známku súrodencov z daných predmetov. Z koľkých predmetov dostala na vysvedčení Karolínka lepšiu známku ako jej brat Jakub?

2. Pri meraní 63 žiakov boli zistené nasledujúce údaje o výške a príslušnom počte žiakov:

<i>výška</i>	<i>počet</i>	<i>výška</i>	<i>počet</i>	<i>výška</i>	<i>počet</i>	<i>výška</i>	<i>počet</i>
159	1	165	2	170	5	175	2
161	1	166	3	171	6	177	1
162	2	167	2	172	7	178	4
163	1	168	4	173	9	179	2
164	2	169	3	174	5	181	1

Určte aritmetický priemer, medián, modus, rozptyl a smerodajnú odchýlku výšky žiakov.

3. Meraním v laboratóriu boli zistené nasledujúce dĺžky valčeka (v milimetroch): {302; 310; 312; 310; 313; 318; 305; 309; 310; 309}. Vypočítajte aritmetický, geometrický priemer, modus a medián.

4. U 20 pracovníkov sa zisťoval mesačný zárobok v eurách. Vypočítajte aritmetický priemer mesačných zárobkov všetkých pracovníkov. Využite nasledujúcu tabuľku.

x_i	interval	stred intervalu
6	501 - 720	610,5
5	721 - 940	830,5
4	941 - 1160	1050,5
2	1161 - 1380	1270,5
3	1381 - 1600	1490,5